THE BOOK WAS DRENCHED

سلسلة كتب مكملان المدرسية المصرية



الجزء الأول

مقرر السنة الاولى من التعليم الثانوى

تأليف

محمد خالد حسنين

مدرس الرياضة بمدرسة المعلمين الخديوية

١٣٣٠ - ١٩١٢

مطبعة المعارف بشارع الفجالة بمصر



الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سائر الانبياء والمرسلين

(وبعد) فلما قررت نظارة المعارف العمومية اعادة تدريس علم الهندسة المستوية وسائر العلوم الرياضية باللغة العربية طرق الرياضيون أبواب التأليف وسارعوا الى التصنيف وكثرت الكتب الرياضية باللغة العربية كما كثر غيرها من الكتب الادبية

غير أن أكثر هذه المؤلفات لا يتفق وروح البرنامج الذى سنّته المعارف المصرية لمدارسها الثانوية لهذا أحببت أن أضع كتاباً يكون شاملاً لما تقررت دراسته على الطلاب فقمت بتأليف هذا المختصر وجعلته على أحدث الطرق

ولما كان علم الهندسة المستوية يدرس فى الثلاث السنين الاولى من التعليم الثانوى قسمت كتابى هذا الى ثلاثة اجزاء وجعلت كل

جزء منها خاصاً بما تقررت دراسته فى كل سنة منها وقد اخترت ما وضعته نظارة المعارف العمومية من الاصطلاحات العربية واكثرت من التمارين وأضفت اليهـا بعضاً من المسائل المحلوله كى يستعين بها الطالب فى حل غيرها وتكون نموذجاً له عند كتابة حلول المسائل التى تلقى عليه واسأل الله أن يجعله نافعاً أنه على ما يشاء قدير

محمد خالد حسنين

محتويات الكتاب

الرموز المستعملة فى الكتاب

الرمز	المدلول
$<$	اكبر من
$>$	اصغر من
$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث



الباب الأول

في التمهيدات والتعاريف الأولية

١ — الجسم والسطح والخط والنقطة

الجسم — كل جسم يشغل محلا معيناً فقالب الطوب مثلا يشغل محلا فى الفراغ قدر حجمه وعند وضعه يقال ان له طولا وعرضاً وسمكا (ارتفاعاً)

(تعريف) الجسم هو ما يشغل محلا معيناً وله عادة ابعاد ثلاثة الطول والعرض والارتفاع

السطح — لو اخذنا قطعة من الصابون وفرضنا انه باستعمالها أخذ ارتفاعها فى النقصان تدريجاً الى ان صارت كورقة رقيقة فبالاستمرار فى استعمال هذه القطعة يأتى وقت يعدم فيه الارتفاع والباقى بعد ذلك يقال له سطح وفى الحقيقة فان الحد الفاصل بين قطعة الصابون والهواء الذى يحيط بها يسمى بالسطح وليس له سمك أصلا فله بعدان فقط الطول والعرض

(تعريف) السطح هو ما له طول وعرض مجرد عن الارتفاع

الخط — لو أخذنا قطعة ورق حمراء ثم لونّا جزءاً منها باللون الاسود سمى الحد الفاصل بين اللونين بالخط فهو ليس بالاحمر ولا بالاسود وليس له عرض فله بعد واحد فقط وهو الطول

(تعريف) الخط هو ما له طول مجرد عن العرض والارتفاع

النقطة — ثم اذا لونّا جزءاً آخر من الورقة الحمراء باللون الازرق بشرط أن يتقاطع مع اللون الاسود فان الخط الفاصل بين اللون الاحمر واللون الاسود يقطع الخط الفاصل بين اللون الاحمر واللون الازرق فيما يسمى بالنقطة وهى مجردة عن كل بعد

(تعريف) النقطة الهندسية هى كل ما له وضع مجرد عن الطول والعرض والارتفاع

٢ — الخط المستقيم والسطح المستوى

الخط المستقيم — الخط اما أن يكون مستقيماً أو منحنياً

فالمستقيم ما حدث من تحرك نقطة فى اتجاه واحد لا يتغير

والمنحنى ما حدث من تحرك نقطة فى اتجاه يتغير على الدوام

وتتميز الخطوط المستقيمة من غيرها بأنه لو اشترك مستقيمان فى نقطتين انطبق أحدهما على الآخر ولا يكون بينهما أى مسافة فلو أخذنا أحد المستقيمين المرسومين (فى شكل ١) وطبقناه على المستقيم الثانى كما فى (شكل ٢) بحيث تقع نقطة ا على نقطة حـ

(شكل ١) (شكل ٢)

ونقطة ب على نقطة ء انطبق المستقيمان تمام الانطباق ولا يكون بينهما ادنى مسافة

(ملاحظة) تطلق كلمة خط وخطوط على الخط المستقيم والخطوط المستقيمة للاختصار

السطح المستوى — السطح المستوى هو سطح لو أخذ فيه نقطتان ووصلا بخط مستقيم كان هذا المستقيم موجوداً بتمامه في هذا السطح و بعبارة أخرى هو سطح ينطبق عليه المستقيم تمام الانطباق مهما تغير وضعه

(ملاحظة) تطلق كلمة مستو على السطح المستوى للاختصار

٣ — الزوايا

اذا تلاقى مستقيمان فى نقطة حدث من تلاقيهما ما يسمى زاوية ويسمى كل من المستقيمين بضلعى الزاوية ونقطة تلاقيهما برأس الزاوية فمثلا اذا فرضنا ان الضلعين ب م ، ا م تلاقيا فى نقطة م (شكل ٣) فان مقدار ميل الضلع ب م على ا م

(شكل ٣)

يسمى زاوية ويقدر هذا الميل بقدر الدوران الذى يدوره ب م حول نقطة م اذا ابتدأ يتحرك وهو منطبق على م ا الى أن يأخذ وضعه الثانى م ب

قراءة الزاوية — تقرأ الزاوية بثلاثة أحرف بحيث يكون حرف الرأس فى الوسط فيقال زاوية ا م ب أو زاوية ب م ا (شكل ٣)

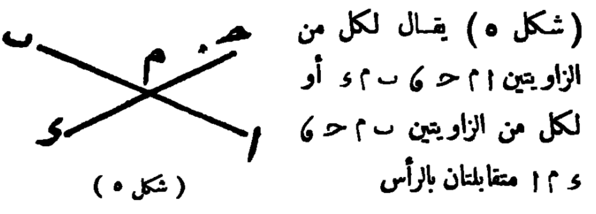
ويجوز قراءة الزاوية بحرف الرأس فقط اذا كانت مفردة فيقال زاوية م (شكل ٣)

وقد يحسن وضع حرف أو رقم داخل الزاوية ليدل عليها فيقال زاوية ٤ وزاوية س (شكل ٤)

الزاويتان المتجاورتان — اذا اتحدت زاويتان فى الرأس وكان بينهما ضلع مشترك يقال لهما متجاورتان فمثلا الزاويتان ا م ب ٬ ب م حـ (شكل ٤) يقال لهما متجاورتان لانهما اتحدتا فى الرأس م ولان الضلع ب م مشترك بينهما

(شكل ٤)

الزاويتان المتقابلتان بالرأس — اذا اتحدت زاويتان فى الرأس وكان ضلعا احداهما على امتداد ضلعى الاخرى يقال للزاويتين متقابلتان بالرأس فمثلا اذا تقاطع المستقيمان ا ب ٬ حـ ء فى نقطة م (شكل ٥) يقال لكل من الزاويتين ا م حـ ٬ ب م ء أو لكل من الزاويتين ب م حـ ٬ ء م ا متقابلتان بالرأس



(شكل ٥)

الزاوية القائمة والعمود — اذا تلاقى مستقيمان وكانت الزاويتان المتجاورتان الحادثتان متساويتين يقال لكل زاوية منهما قائمة ويقال

للمستقيمين متعامدان وان كلا منهما عمودى على الآخر فمثلا اذا تلاقى ا ب ، حـ م فى نقطة م (شكل ٦) وكانت ∠ ا م حـ = ∠ حـ م ب يقال لكل من هاتين الزاويتين قائمة ويكون حـ م عمودياً على ا ب

حـ
ب م ا

(شكل ٦)

(ملاحظة) تنقسم الزاوية القائمة الى ٩٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى درجة وتنقسم الدرجة الى ٦٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى دقيقة والدقيقة الى ٦٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى ثانية

ويرمز للدرجة بالرمز (°) وللدقيقة بالرمز (′) وللثانية بالرمز (″)

الزاوية الحادة — يقال للزاوية حادة اذا كان مقدارها أقل من قائمة مثل زاوية ا م ب (شكل ٧)

ب
م ا

(شكل ٧)

الزاوية المنفرجة — يقال للزاوية منفرجة اذا كان مقدارها أكبر من قائمة وأصغر من قائمتين مثل زاوية ا م ب (شكل ٨)

ب
م ا

(شكل ٨)

٤ — الدعوى والبرهان

يختص علم الهندسة المستوية بدراسة الاشكال المرسومة على

السطح المستوى ويشتمل ذلك على جملة دعاوى بعضها نظرى و بعضها الآخر عملى ولا تثبت صحة هذه الدعاوى الا باقامة الدليل (البرهان)

الدعوى النظرية — هى دعوى حقيقية تتضح صحتها بواسطة برهان عقلى

الدعوى العملية — هى دعوى تتطلب انشاء عمل هندسى مع اقامة البرهان العقلى على صحته

ويشتمل منطوق الدعوى على مفروض ومطلوب

مفروض الدعوى — هو الحقيقة التى تفرض فى الدعوى ويعترف بصحتها

مطلوب الدعوى — هو الحقيقة التى يراد اقامة البرهان على صحتها

(ملاحظة) وقد تستلزم اقامة البرهان العقلى رسم خطوط أولية تسمى بالعمل

النتيجة — هى حقيقة تستخرج من دعوى قام الدليل على صحتها

البرهان — هو الدليل الذى بواسطته تتضح صحة الدعوى

٥ — البديهيات

البديهيات هى مبادئ بسيطة يدركها العقل لاول وهلة لسهولتها ووضوحها ولا تحتاج الى برهان للتسليم بصحتها وهاك مثالها

بديهية ١ — الشيئان المساوى كل منهما لشىء واحد يكونان متساويين

بديهية ٢ — اذا أضفنا أشياء متساوية الى اخرى متساوية كانت الحواصل متساوية

بديهية ٣ — اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية كانت البواقى متساوية.

بديهية ٤ — اذا أضفنا أشياء متساوية الى أخرى غير متساوية كانت الحواصل غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ٥ — اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى غير متساوية كانت البواقى غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ٦ — المضاعفات الواحدة للشىء نفسه أو للاشياء المتساوية تكون متساوية

بديهية ٧ — الشيئان اللذان يساويان نصف الشىء الواحد أو انصاف أشياء متساوية يكونان متساويين

بديهية ٧ — اذا ضربنا أشياء غير متساوية فى مقدار واحد كانت الحواصل مختلفة وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ٩ — اذا قسمنا أشياء غير متساوية على مقدار واحد كانت الخوارج غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ١٠ — الكل أكبر من الجزء والجزء أصغر من الكل

وهناك بديهيات غير التى ذكرت نخص منها بعض بديهيات تسمى بالبديهيات الهندسية وهاك مثالها

(١) الاجسام التى ينطبق بعضها على بعض تكون متساوية

(٢) المستقيمان اللذان يتحدان فى نقطتين يكونان فى اتجاه واحد

(٣) المستقيم المحدود له نقطة تنصيف واحدة فقط

٦ — القضايا المسلمة صحتها

ان الاشكال الهندسية التى يلزم رسمها فى الهندسة المستوية تستلزم استعمال المسطرة والفرجار (البرجل) ولاجل الوصول الى رسم هذه الاشكال يجب تسليم صحة بعض قضايا عملية وهاك مثالها

(١) يمكن رسم مستقيم من أى نقطة مفروضة الى أى نقطة أخرى معلومة .

(٢) يمكن مد مستقيم على استقامته الى أن يبلغ أى طول

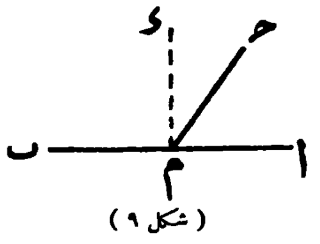
(٣) يمكن رسم دائرة من أى نقطة نعتبرها مركزاً و بأى نصف قطر

الباب الثانى

فى الخطوط والزوايا

« نظرية ١ »

اذا تلاقى مستقيم وآخر فان مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادثتين فى جهة واحدة منه يساوى قائمتين



(شكل ٩)

(المفروض) ان المستقيم ﺣ م يتلاقى مع المستقيم ا ب فى نقطة م ويصنع الزاويتين المتجاورتين ا م ﺣ ، ﺣ م ب فى جهة واحدة من ا ب

(المطلوب اثباته) أن ∠ ا م ﺣ + ∠ ﺣ م ب = زاويتين قائمتين

(البرهان) نقيم من نقطة م العمود م ى على ا ب فتكون ∠ ا م ى = قائمة وكذلك فتكون ∠ ى م ب = قائمة

من الشكل ∠ ﺣ م ب = ∠ ﺣ م ى + ∠ ى م ب

فتكون ∠ ا م ح + ∠ ح م ب

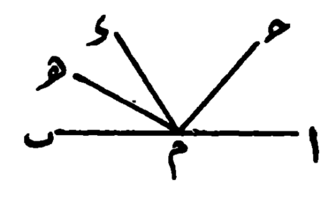
= ∠ ا م ح + ∠ ح م د + ∠ د م ب

ولكن ∠ ا م ح + ∠ ح م د = ∠ ا م د

فتكون ∠ ا م ح + ∠ ح م ب = ∠ ا م د + ∠ د م ب

= زاويتين قائمتين وهو المطلوب

نتيجة ١ — مجموع الزاويا المجتمعة حول نقطة مفروضة على مستقيم وفى جهة واحدة منه يساوى قائمتين



(شكل ١٠)

(البرهان) ∠ ح م د + ∠ د م ه + ∠ ه م ب

= ∠ ح م ب

فتكون ∠ ا م ح + ∠ ح م د ∠ د م ه + ∠ ه م ب

= ∠ ا م ح + ∠ ح م ب

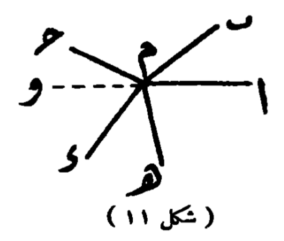
ولكن ∠ ا م ح + ∠ ح م ب = ٢ ق (نظرية ١)

فتكون ∠ ا م ح + ∠ ح م د + ∠ د م ه ∠ ه م ب

= ٢ ق وهو المطلوب

نتيجة ٢ — مجموع الزاويا المتجاورة المجتمعة حول نقطة واحدة فى جميع جهاتها يساوى أربع قوائم

(البرهان) نمد ا م على استقامته الى و



(شكل ١١)

فتكون ∠ ا م ب + ∠ ب م ح + ∠ ح م و
= ٢ ق (نظرية ١)

وتكون ∠ و م ى + ∠ ى م هـ + ∠ هـ م ا
= ٢ ق (نظرية ١)

وبالجمع تكون ∠ ا م ب + ∠ ب م ح + ∠ ح م و + ∠ و م ى
+ ∠ ى م هـ + ∠ هـ م ا = ٤ ق

ولكن من الشكل ∠ ح م و + ∠ و م ى = ∠ ح م ى

فتكون ∠ ا م ب + ∠ ب م ح + ∠ ح م ى + ∠ ى م هـ
+ ∠ هـ م ا = ٤ ق وهو المطلوب

(تعريف) يقال أن الزاويتين متكاملتان متى كان مجموعهما يساوى قائمتين وتسمى احداهما مكملة الاخرى مثل زاويتى ا م ح ، ح م ب (شكل ٩)

(تعريف) ويقال أن الزاويتين متتامتان متى كان مجموعهما يساوى قائمة واحدة وتسمى احداهما متممة للاخرى مثل زوايتى ا م ح ، ح م ى (شكل ٩)

نتيجة ٣ ــ الزوايا المكملة لزاوية واحدة كلها متساوية

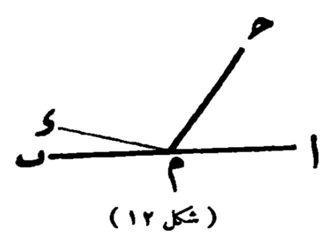
نتيجة ٤ ــ الزواية المتممة لزاوية واحدة كلها متساوية

(تنبيه) يقال ان النظريتين متعاكستان متى كان مفروض الاولى مطلوباً اثباته فى الثانية والمطلوب اثباته فى الاولى هو مفروض الثانية

« نظرية ٢ »

(وهى عكس نظرية ١)

اذا كانت الزاويتان المتجاورتان متكاملتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة



(شكل ١٢)

(المفروض) ان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا م حـ ، حـ م ب يساوى قائمتين

(المطلوب اثباته) ان ضلعيهما م ا ، م ب على استقامة واحدة

(البرهان) ان لم يكن م ب على استقامة م ا نمد ا م على استقامته الى ى

وتكون ∠ حـ م ى + ∠ حـ م ا = ٢ ق (نظرية ١)

ولكن ∠ حـ م ب + ∠ حـ م ا = ٢ ق (بالفرض)

فتكون ∠ حـ م ى + ∠ حـ م ا = ∠ حـ م ب + ∠ حـ م ا

وتكون ∠ حـ م ى = ∠ حـ م ب

وذلك لا يتأتى الا اذا انطبق المستقيمان م ى ، م ب

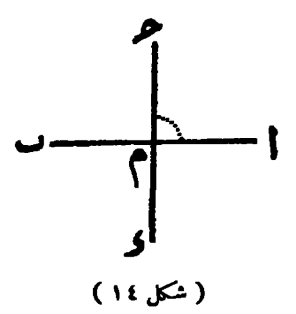
ومن حيث ان م ى على استقامة ا م (بالعمل)

فيكون م ب على استقامة ا م ايضاً (وهو المطلوب)

(تنبيه) لا يقتصر فى علم الهندسة على اعطاء النظريات والدعاوى العملية لمجرد الحفظ وانما هناك تمارين تطبيقية تستلزم استخدام هذه الدعاوى وتلك البديهيات والقضايا المسلمة صحتها لاثبات حقيقتها الهندسية

تمارين (١)

(١) اذا كانت احدى الزاويا الاربع الحادثة من تقاطع مستقيمين قائمة تكون كل من الثلاثة الاخرى قائمة كذلك



(شكل ١٤)

(المفروض) ان حـ ء يقطع ا ب فى نقطة م وانه يصنع الزاويا الاربع ا م حـ ، حـ م ب ، ب م ء ، ء م ا مع العلم بأن ∠ ا م حـ قائمة

(المطلوب اثباته) ان كلا من الزاويا حـ م ب ، ب م ء ، ء م ا قائمة

(البرهان) (اولا) ∠ ا م حـ + ∠ حـ م ب = ٢ ق (نظرية ١)

ولكن ∠ ا م حـ = ق (بالفرض)

اذن ∠ حـ م ب = ق

(ثانياً) ∠ حـ م ب + ∠ ب م ء = ٢ ق (نظرية ١)

ولكن ∠ حـ م ب = ق (بالاثبات)

اذن ∠ ب م ء = ق

(ثالثاً) ∠ ب م ء + ∠ ء م ا = ٢ ق (نظرية ١)

ولكن ∠ ب م ء = ق (بالاثبات)

اذن ∠ ء م ا = ق وهو المطلوب

(٢) فى المثلث ا ب حـ الزاوية ا ب حـ = الزاوية ا حـ ب فبرهن على ان لزاويتين الخارجتين الحادثتين من امتداد الضلع ب حـ فى كل من جهتيه متساويتان

(٣) فى المثلث ا ب حـ الزاوية ا ب حـ = الزاوية ا حـ ب فاذا مد الضلع ا ب جهه ب الى س والضلع ا حـ جهة حـ الى ص فبرهن على ان ∠ حـ ب س = ∠ ب حـ ص

(٤) برهن على ان منصفى زاويتين متجاورتين حادثتين من تلاقى مستقيمين متعامدان

(٥) من نقطة م المفروضة على المستقيم ا ب رسم م حـ عمودياً على ا ب وفى احدى جهتيه ثم رسم م ء عموداً على ا ب ايضاً وفى الجهة الاخرى منه فبرهن على ان م حـ على استقامة م ء

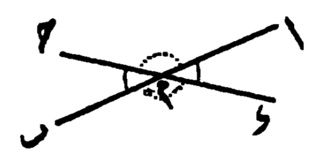
(٦) من نقطة م المفروضة على حـ ء رسم المستقيم م ا بحيث يصنع الزاوية حـ م ا ومن نقطة م ايضاً رسم المستقيم م ب بحيث يصنع الزاوية ء م ب مساوية للزاوية حـ م ا فبرهن على ان ا م على استقامة م ب

(٧) اذا كانت الزاوية الحادثة من منصفى زاويتين متجاورتين قائمة فبرهن على ان ضلعى الزاويتين المتطرفين على استقامة واحدة

(٨) ا م ب ، حـ م ء مستقيمان متقاطعان معاً بالتعامد فبرهن على ان منصف زاوية ا م ء على استقامة منصف زاوية حـ م ب

« نظرية ٣ »

الزاويتان المتقابلتان فى الرأس متساويتان



(شكل ١٤)

(المفروض) ان ا ب ، حـ ء تقاطعا فى م وان الزاويتين ا م حـ ، ء م ب متقابلتان فى الرأس وان الزاويتين ا م ء ، حـ م ب متقابلتان فى الرأس كذلك

(المطلوب اثباته) ان ∠ ا م ح = ∠ ء م ب

وان ∠ ا م ء = ∠ ح م ب

(البرهان) بما ان المستقيم ا م يلاقي المستقيم ح ء في نقطة م

فتكون ∠ ا م ح + ∠ ا م ء = ٢ ق (نظرية ١)

وكذلك ء م يلاقي ا ب في نقطة م

فتكون ∠ ء م ب + ∠ ا م ء = ٢ ق (نظرية ١)

وعليه تكون ∠ ا م ح + ∠ ا م ء = ∠ ء م ب + ∠ ا م ء

وتكون ∠ ا م ح = ∠ ء م ب

وبالطريقة نفسها يبرهن على ان ∠ ا م ء = ∠ ح م ب

وهو المطلوب

تمارين (٢)

(١) اذا تقاطع المستقيمان ا ب ، ح ء في نقطة م وكان م س منصفاً ∠ ب م ء فبرهن على ان امتداد س م ينصف ∠ ا م ح

(٢) برهن على ان منصفي زاويتين متقابلتين في الرأس على استقامة واحدة

(٣) برهن على ان منصفات اربع الزوايا الحادثة من تقاطع مستقيمين متعامدة

الباب الثالث

فى المثلثات

(١) الشكل المستوى هو جزء من السطح المستوى محاط بخط أو اكثر ويسمى مجموع الخطوط التى تحيط بالشكل بمحيطه ويسمى مقدار السطح المحصور فى هذا المحيط بمساحته

(٢) كثير المستقيمات هو شكل مستو محاط بخطوط مستقيمة ومتى كان عدد المستقيمات التى تحيط بالشكل اكثر من ثلاثة سمى مضلعاً وتسمى الاضلاع التى تحيط بالشكل بأضلاع المضلع والزوايا الناتجة من تقاطع الاضلاع بزوايا المضلع

(٣) يقال للمضلع انه متساوى الاضلاع اذا تساوت اضلاعه ومتساوى الزوايا اذا تساوت زواياه ومنتظم اذا كان متساوى الزوايا والاضلاع

(٤) يقال للمضلع انه محدودب اذا لم يزد مقدار احدى زواياه على قائمتين

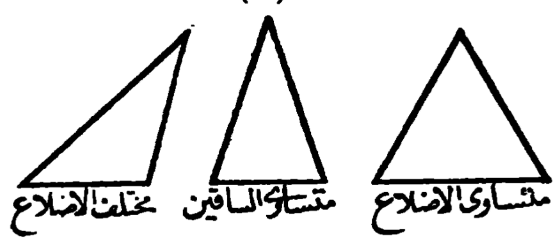
(ملاحظة) تطلق كلمة مضلع على المضلع المحدودب للاختصار لان المضلع غير المحدودب ليس من مباحثنا الآن

(٥) الشكل الرباعى هو مضلع يحيط به اربعة اضلاع

(٦) المثلث هو شكل مستو محدود بثلاثة مستقيمات

(٧) وتسمى المستقيمات باضلاع المثلث والزوايا الناتجة من تقاطع الاضلاع زوايا المثلث ورءوس هذه الزوايا برءوس المثلث

(٨) والمثلث يسمى متساوى الاضلاع اذا تساوت اضلاعه ومتساوى الساقين اذا تساوى فيه ضلعان ومختلف الاضلاع اذا كانت اضلاعه مختلفة الطول كما فى شكل (١٥)

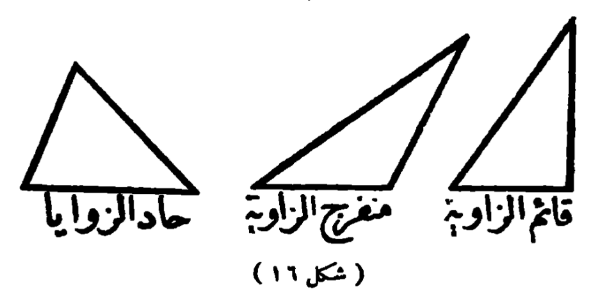


(شكل ١٥)

(٩) ويمكن اعتبار اى رأس من رءوس زوايا المثلث رأساً له ويعتبر عادة الضلع المقابل لهذا الرأس قاعدة له

(١٠) وفى المثلث المتساوى الساقين تعتبر عادة نقطة تقاطع ساقيه رأساً له وضلعه الثالث قاعدة له

(١١) والمثلث يسمى قائم الزاوية اذا كانت احدى زواياه قائمة ومنفرج الزاوية اذا كانت احدى زواياه منفرجة وحاد الزوايا اذا كانت زواياه الثلاث حادة كما فى (شكل ١٦)

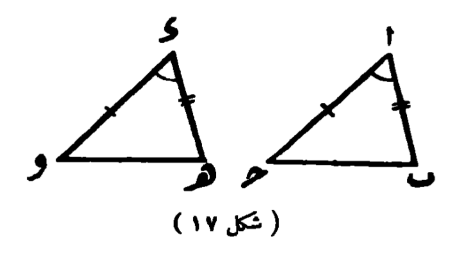


(شكل ١٦)

(١٢) المستقيم الذى يصل رأس المثلث بمنتصف قاعدته يسمى بالمستقيم المتوسط أو بمنصف المثلث

« نظرية ٤ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما كل مع نظيره



(شكل ١٧)

(المفروض) أن المثلثين ا ب حـ ، ى هـ و فيهما الضلع ا ب = ى هـ ، الضلع ا حـ = ى و والزاوية المحصورة ب ا حـ = الزاوية المحصورة هـ ى و

(المطلوب اثباته) ان المثلث ا ب حـ = المثلث هـ ى و من عامة الوجوه

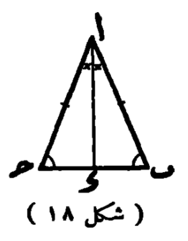
(البرهان) نطبق △ ا ب حـ على △ ى هـ و على شرط ان النقطة ا تقع على النقطة ى ويأخذ الضلع ا ب الاتجاه ى هـ

ومن حيث أن ى هـ = ا ب فتقع نقطة ب على نقطة هـ

ومن حيث أن ا ب انطبق على ى ه و ∠ ب ا حـ = ∠ ه ى و
فيقع الضلع ا حـ على ى و
ومن حيث أن ا حـ = ى و فتقع نقطة حـ على نقطة و
ومن حيث أن نقطة ب وقعت على ه ونقطة حـ وقعت على و
فالضلع ب حـ ينطبق على ه و
فينطبق اذن المثلث ا ب حـ على المثلث ى ه و وبذلك يتساويان
من عامة الوجوه وهو المطلوب

تمارين (٣)

(١) المطلوب البرهنة على ان المستقيم الذى ينصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها



(شكل ١٨)

(المفروض) ان المثلث ا ب حـ متساوى الساقين (ا ب = ا حـ)
وأن المستقيم ا ى ينصف زاوية ب ا حـ
(المطلوب اثباته) ان ب ى = ى حـ وان ا ى عمودى على ب حـ
(البرهان) فى المثلثين ب ا ى و حـ ا ى

بما ان
ب ا = حـ ا بالفرض
و ى ا مشترك بين المثلثين
و ∠ ب ا ى = ∠ حـ ا ى بالفرض

ينطبق △ ب ا ى على △ حـ ا ى (نظرية ٤)
ويكون ب ى = حـ ى
و ∠ ب ى ا = ∠ حـ ى ا

وبما ان ∠ ب ى ا + ∠ حـ ى ا = ٢ ق فتكون كل منهما قائمة ويكون ا ى عمودياً على ب حـ وبذلك يثبت المطلوب

(٢) فى المسألة السابقة اذا أخذنا على ا ى نقطة مثل ر ووصلنا بينها وبين ب و حـ فبرهن على ان ر ب = ر حـ

(٣) اذا فرضت نقطة مثل ى على منصف الزاوية ب ا حـ فبرهن على ان ∠ ا ى ب = ∠ ا ى حـ اذا كان الضلع ا ب = ا حـ

(٤) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين نصفنا ساقيه ا ب و ا حـ بالنقطتين ى و هـ ثم وصلنا ى حـ و هـ ب والمطلوب البرهنة على ان ى حـ = هـ ب

(٥) زاوية رأسها ا أخذ على أحد ضلعيها النقطتان ب و ى وأخذ على الضلع الثانى النقطتان حـ و هـ بشرط ان ا ب = ا حـ وان ا ى = ا هـ والمطلوب البرهنة على ان ب هـ = حـ ى

(٦) ا ب حـ ى مربع ونقطة هـ منتصف الضلع ا ب فاذا وصل بينها وبين نقطتى حـ و ى فبرهن على أن هـ حـ = هـ ى

(٧) ا ب حـ ى مربع ونقطة هـ منتصف الضلع ا ب فاذا أخذنا على الضلعين ا ى و ب حـ البعدين المتساويين ا س و ب ص ووصلنا

بين نقطة ﻫ و بين نقطتى س ، ص فبرهن على ان ﻫ س = ﻫ ص

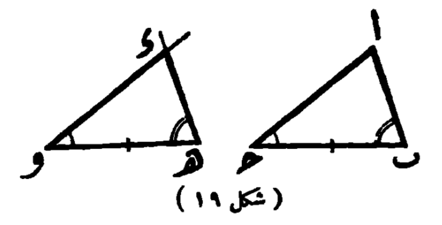
(٨) ا ب حـ ى شكل رباعى فيه ا ب = ى حـ ، ∠ ب = ∠ حـ ونقطة ﻫ منتصف الضلع ب حـ والمطلوب البرهنة على ان ﻫ ا = ﻫ ى

(٩) ا ب حـ ، ى ﻫ و مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا فرض أن نقطة س منتصف ب حـ ونقطة ص منتصف ﻫ و فبرهن على ان ا س = ى ص ، ∠ ا س ب = ∠ ى ص ﻫ

(١٠) اذا فرض أن نقطة ى هى منتصف الضلع ب حـ فى △ ا ب حـ ومد ا ى الى ﻫ بحيث كان ى ﻫ = ا ى فبرهن على ان ا ب = ﻫ حـ

« نظرية ٥ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما ضلع ومجاورتاه من الزوايا كل مع نظيره



(شكل ١٩)

(المفروض) ان المثلثين ا ب حـ ، ى ﻫ و فيهما الضلع ب حـ = ﻫ و ، ∠ ا ب حـ = ∠ ى ﻫ و ، ∠ ا حـ ب = ∠ ى و ﻫ

(المطلوب اثباته) ان المثلث ا ب حـ = المثلث ء هـ و من عامة الوجوه

(البرهان) نطبق △ ا ب حـ على △ ء هـ و على شرط ان النقطة ب تقع على النقطة هـ ويأخذ الضلع ب حـ الاتجاه هـ و

ومن حيث ان ب حـ = هـ و فتقع نقطة حـ على نقطة و

ومن حيث ان ب حـ انطبق على هـ و ۶ ∠ ا ب حـ = ∠ ء هـ و فيقع الضلع ب ا على هـ ء

وكذلك من حيث ان ب حـ انطبق على هـ و ۶ ∠ ا حـ ب = ∠ ء و هـ فيقع الضلع حـ ا على و ء

ومن حيث ان كل مستقيمين لا يتلاقيان الا فى نقطة واحدة فبانطباق الضلع ب ا على هـ ء والضلع حـ ا على و ء يجب ان تقع ا (نقطة تلاقى الضلعين ب ا ۶ حـ ا) على ء (نقطة تلاقى الضلعين هـ ء ۶ و ء)

فينطبق اذن المثلث ا ب حـ على المثلث ء هـ و وبذلك يتساويان من عامة الوجوه وهو المطلوب

تمارين (٤)

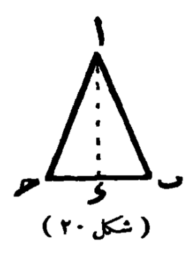
(١) ا ب حـ مثلث فيه ∠ ب = ∠ حـ فاذا نصفت القاعدة ب حـ فى ء وكان ا ء عمودياً على ب حـ فبرهن على ان ا ب = ا حـ وان ا ء ينصف ∠ ا

(٢) اذا كان منصف زاوية رأس مثلث عمودياً على القاعدة فان المثلث يكون متساوى الساقين

(٣) ا ب حـ ، ى ء هـ و مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا فرض ان ا س ينصف ∠ ا ويقابل ب حـ فى نقطة س وان ى ص ينصف ∠ ى ويقابل هـ و فى نقطة ص فبرهن على ان ا س = ى ص

« نظرية ٦ »

الزاويتان المقابلتان لساقى مثلث متساوى الساقين متساويتان



(شكل ٢٠)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا حـ

(المطلوب اثباته) ان ∠ ا ب حـ = ∠ ا حـ ب

(البرهان) نرسم المستقيم ا ى ينصف ∠ ب ا حـ

ففى المثلث ا ب ى والمثلث ا حـ ى

من حيث ان { ا ب = ا حـ بالفرض ، ا ى مشترك بين المثلثين ، ∠ ب ا ى = ∠ حـ ا ى بالعمل }

ينطبق △ ا ب ى على △ ا حـ ى (نظرية ٤)

وبذلك ∠ ا ب ى = ∠ ا حـ ى وهو المطلوب

(نتيجة) المثلث المتساوى الاضلاع يكون متساوى الزوايا

تمارين (٥)

(١) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فاذا مد كل من ساقيه ا ب ، ا حـ الى س ، ص فبرهن على ان ∠ س ب حـ = ∠ ص حـ ب

(٢) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فاذا اخذ على قاعدته ب حـ البعد ب س = حـ ص فبرهن على ان ∠ ا س ص = ∠ ا ص س

(٣) برهن على ان المستقيمين اللذين يصلان منتصف قاعدة مثلث متساوى الساقين بمنتصفى ضلعيه متساويان

(٤) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فاذا نصف الساق ا ب فى نقطة س والساق ا حـ فى نقطة ص فبرهن على ان س حـ = ص ب

(٥) منصفا زوايتى قاعدة مثلث متساوى الساقين متساويان

(٦) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) فاذا تقاطع منصفا زوايتى ا ، حـ فى نقطة م فبرهن على ان م ب ينصف زاوية ب

« نظرية ٧ »

(وهى عكس نظرية ٦)

اذا تساوت زاويتان فى مثلث فان الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين

(شكل ٢١)

(المفروض) ان ∠ ا ب حـ = ∠ ا حـ ب

(المطلوب اثباته) ان الضلع ا حـ = الضلع ا ب

(البرهان) نرسم المثلث ا ب حـ مقلوب الوضع بأن يأخذ الضلع ا ب الوضع اَ بَ والضلع ا حـ الوضع اَ حـَ

من حيث ان ∠ ب = ∠ حـ بالفرض

و ∠ حـ = ∠ حـَ بالعمل

فتكون ∠ ب = ∠ حـَ

وبالمثل نبرهن على أن ∠ حـ = ∠ بَ

ومن حيث أن الضلع ب حـ = حـَ بَ في الطول

فينطبق المثلث ا ب حـ على المثلث اَ حـَ بَ وهو في وضعه المقلوب (نظرية ٥)

وبذلك يتساوى المثلثان من عامة الوجوه

ويكون ا ب = اَ حـَ

ولكن اَ حـَ = ا حـ بالعمل

اذن ا ب = ا حـ وهو المطلوب

(نتيجة) المثلث المتساوى الزوايا يكون متساوى الاضلاع

تمارين (٦)

(١) اذا مد كل من الضلعين ا ب ، ا حـ من △ ا ب حـ الى س ، ص وكانت ∠ س ب حـ = ∠ ص حـ ب فبرهن على ان المثلث ا ب حـ متساوى الساقين

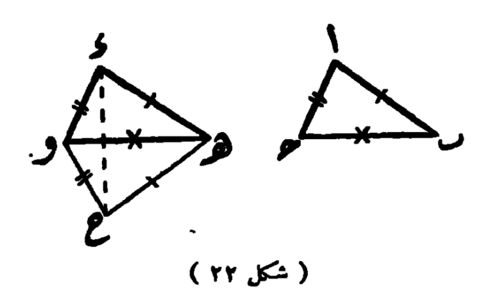
(٢) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) فاذا تقاطع منصفا الزاويتين المتساويتين فى نقطة م فبرهن على ان △ م ب حـ متساوى الساقين ايضاً

(٣) فى المسألة السابقة فبرهن على أن م ا ينصف ∠ ا

(٤) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ا ء ، ∠ ب = ∠ ء برهن على أن حـ ب = حـ ء

« نظرية (٨) »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوت فيهما الثلاثة الاضلاع كل مع نظيره



(شكل ٢٢)

(المفروض) ان ا ب حـ ، ء هـ و مثلثان فيهما ا ب = ء هـ
، ا حـ = ء و ، ب حـ = هـ و

(المطلوب اثباته) أن هذين المثلثين متساويان من عامة الوجوه

(البرهان) نتصور وضع المثلث ا ب حـ أسفل المثلث ء هـ و
على شرط أن ينطبق الضلع ب حـ على مساويه هـ و ويأخذ الضلع
ا ب الوضع ح هـ والضلع ا حـ الوضع ح و ثم نصل ء ح

فمن حيث ان هـ ء = هـ ح

فتكون ∠ هـ ح ء = ∠ هـ ء ح (نظرية ٥)

ومن حيث ان و ء = و ح

فتكون ∠ و ح ء = ∠ و ء ح

وعلى ذلك فالزاوية الكلية هـ ء و = الزاوية الكلية هـ ح و

أى ان ∠ هـ ء و = ∠ ب ا حـ

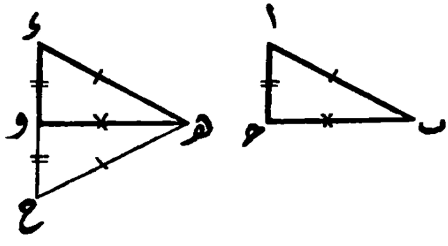
وفى △ ب ا حـ ، △ هـ ء و

من حيث أن { ا ب = ء هـ بالفرض ، ا حـ = ء و بالفرض ، ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و بالاثبات }

فينطبق اذن المثلث ب ا حـ على المثلث هـ ء و وبذلك يتساويان
من عامة الوجوه (نظرية ٤)

(ملاحظة) هذا البرهان خاص ويستخدم فى حالة ما يقع ء ح
داخل الشكل بأن كان المثلثان حادى الزوايا فاذا كان المثلثان منفرجى
الزاوية أو قائمى الزاوية نستخدم برهاناً آخر خاصاً لكل حالة منهما

(الحالة الاولى) عند ما يكون المثلثان قائمى الزاوية كما فى شكل (٢٣)



(شكل ٢٣)

(البرهان) بعد وضع المثلث ا ب حـ أسفل المثلث ء هـ و نرى فى هذه الحالة أن ء ع يمر بنقطة و

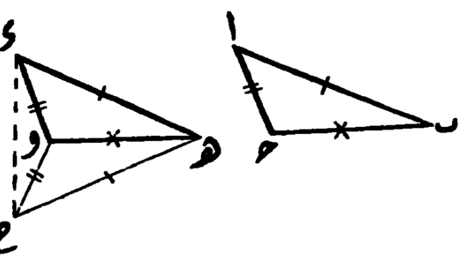
وفى △ هـ ء ع   الضلع هـ ء = هـ ع

فتكون   ∠ هـ ء ع = ∠ هـ ع ء

أى ان   ∠ هـ ء و = ∠ ب ا حـ

و بذلك يتساوى المثلثان   ا ب حـ ، ء هـ و من عامة الوجوه

(الحالة الثانية) عند ما يكون المثلثان منفرجى الزاوية كما فى شكل (٢٤)



(شكل ٢٤)

(البرهان) بعض وضع المثلث ا ب حـ أسفل المثلث ء هـ و ونرى فى هذه الحالة أن ء ع خارج المثلثين ولا يتقاطع مع هـ و

فى △ هـ ءع الزاوية هـ ء ع = الزاوية هـ ع ء كما سبق

وكذلك فى △ و ء ع ∠ و ء ع = ∠ و ع ء

اذن ∠ هـ ء ع – ∠ و ء ع = ∠ هـ ع ء – ∠ و ع ء

اى ان ∠ هـ ء و = ∠ هـ ع و

أو ∠ هـ ء و = ∠ ب ا حـ

وبذلك يتساوى المثلثان ا ب حـ ، ء هـ و من عامة الوجوه

تمارين (٧)

(١) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ا ء ، حـ ب = حـ ء والمطلوب البرهنة على ان ا حـ ينصف زاويتى ا ، حـ

(٢) ب ا حـ زوية أخذ على ضلعيها بعدان متساويان ا ب ، ا حـ ثم رسم على ب حـ المثلث ب حـ ء فيه ب ء = حـ ء والمطلوب البرهنة على ان ا ء ينصف ∠ ب ا حـ

(٣) ا ب حـ ، ء ب حـ مثلثان متساوياً الساقين مرسومان فى جهتى قاعدة مشتركة بينهما وهى ب حـ برهن على أن ا ء ينصف ب حـ ويكون عمودياً عليه

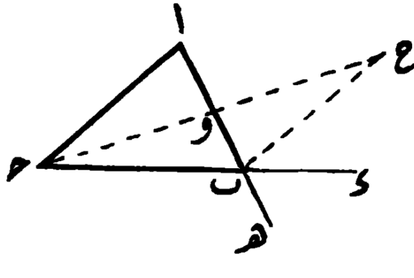
(٤) ا ب حـ ، ء ب حـ مثلثان متساوياً الساقين مرسومان فى جهة واحدة لقاعدة مشتركة بينهما وهى ب حـ برهن على أن امتداد ا ء ينصف ب حـ ويكون عمودياً عليه

(٥) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ا ء = ب حـ وقطره

ا حـ = ب ى برهن على ان ∠ ا ى حـ ∠ ب حـ ى

« نظرية ٩ »

اذا مد احد اضلاع مثلث على استقامته فان الزاوية الخارجة الحادثة تكون اكبر من أى زاوية من زواياه الداخلة ما عدا المجاورة لها



(شكل ٢٥)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث ومددنا ضلعه حـ ب على استقامته الى ى

(المطلوب اثباته) ان الزاوية الخارجة ا ب ى أكبر من كل من ∠ ا حـ ب ∠ ب ا حـ

(البرهان) لذلك نفرض أن و منتصف ا ب ونصل حـ و ونمده على استقامته ونأخذ على امتداده البعد و ع = حـ و ثم نصل ع ب

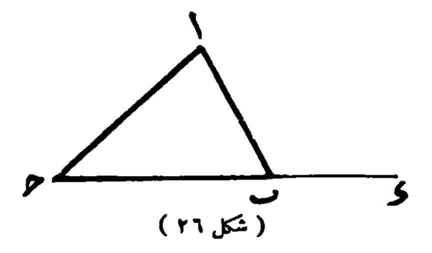
ففى المثلثين ا حـ و ، ب ع و

من حيث ان
- ا و = و ب بالعمل
- حـ و = و ع ، بالعمل
- ∠ ا و حـ = ∠ ب و ع لتقابلهما بالرأس ،

ينطبق △ ا و حـ على △ ب و ح (نظرية ٤)
فتكون ∠ حـ ا و = ∠ و ب ح
لكن ∠ و ب ى اكبر من ∠ و ب ح
فتكون ∠ ا ب ى اكبر من ∠ ب ا حـ
وبالطريقة عينها يمكننا أن نبرهن على ان ∠ ا ب ى اكبر من ∠ ا حـ ب وبذلك يثبت المطلوب

« نظرية ١٠ »

مجموع أى زاويتين فى المثلث أصغر من قائمتين



(شكل ٢٦)

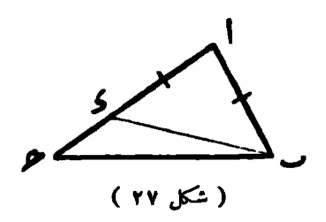
(المفروض) ان المثلث ا ب حـ مثلث أيا كان
(المطلوب اثباته) ان ∠ ا ب حـ + ∠ ا حـ ب أقل من قائمتين
(البرهان) نمد حـ ب الى ى
فتكون ∠ ا حـ ب اصغر من ∠ ا ب ى (نظرية ٩)
وبأضافة ∠ ا ب حـ الى طرفى المتباينة يكون
∠ ا حـ ب + ∠ ا ب حـ اصغر من ∠ ا ب ى + ∠ ا ب حـ
أى ان ∠ ا حـ ب + ∠ ا ب حـ أصغر من زاويتين قائمتين

نتيجة ١ — يجب ان يكون فى كل مثلث زاويتان حادتان على الاقل

نتيجة ٢ — لا يمكن ان يرسم من نقطة خارج مستقيم الا مستقيم واحد عمودى عليه

« نظرية ١١ »

اذا اختلف ضلعان فى المثلث فالضلع الاكبر تقابله الزاوية الكبرى



(شكل ٢٧)

(المفروض) فى المثلث ا ب ح الضلع ا ح اكبر من الضلع ا ب

(المطلوب اثباته) ان ∠ ا ب ح اكبر من ∠ ا ح ب

(البرهان) نأخذ على ا ح البعد ا ء = ا ب ونصل ب ء

فمن حيث ان ا ب = ا ء

تكون ∠ ا ء ب = ∠ ا ب ء (نظرية ٦)

ولكن ∠ ا ء ب خارجة بالنسبة الى المثلث ب ء ح

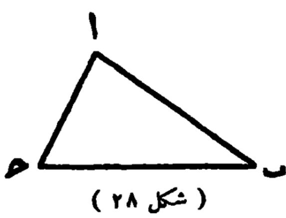
اذن ∠ ا ء ب اكبر من ∠ ء ح ب التى هى ∠ ا ح ب

اى ان ∠ ا ب ء اكبر من ∠ ا ح ب

ومن باب اولى ∠ ا ب ح اكبر من ∠ ا ح ب وهو المطلوب

« نظرية ١٢ »

اذا اختلفت زاويتان فى مثلث فالزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر



(شكل ٢٨)

(المفروض) المثلث ا ب حـ فيه الزاوية ا حـ ب أكبر من الزاوية ا ب حـ

(المطلوب اثباته) أن الضلع ا ب أكبر من الضلع ا حـ

(البرهان) ان لم يكن ا ب أكبر من ا حـ فاما ان يساويه واما أن يكون أصغر منه

فان كان ا ب = ا حـ

لزم أن تكون ∠ ا حـ ب = ∠ ا ب حـ

وهذا خلاف الفرض

وان كان ا ب أصغر من ا حـ

لزم أن تكون ∠ ا حـ ب أصغر من ∠ ا ب حـ

وهذا خلاف الفرض ايضا

وعلى ذلك فالضلع ا ب لا يمكن أن يساوى ا حـ كما أنه لا يمكن أن يكون أصغر منه

اذن يجب أن يكون ا ب أكبر من ا حـ

وهو المطلوب

« نظرية ١٣ »

أى ضلع فى المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين

ى
ا
ح ب

(شكل ٢٩)

(المفروض) أن ا ب ح مثلث

(المطلوب اثباته) أن احد الاضلاع وليكن ب ح اصغر من ب ا + ا ح

(البرهان) نمد ح ا على استقامته ونأخذ على امتداده البعد ا ى يساوى ا ب ثم نصل ى ب

فمن حيث أن ا ى = ا ب

تكون ∠ ا ب ى = ∠ ا ى ب (نظرية ٦)

ولكن ∠ ا ب ى أصغر من ∠ ح ب ى

اذن ∠ ا ى ب أصغر من ∠ ح ب ى

اى ان ∠ ح ى ب اصغر من ∠ ح ب ى

وعلى ذلك ففى △ ى ب ح

يكون ب ح أصغر من ح ى (نظرية ١٢)

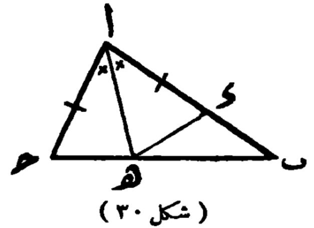
ولكن ح ى = ى ا + ا ح

اذن ب ح أصغر من ى ا + ا ح

اى ان ب ح أصغر من ب ا + ا ح وهو المطلوب

« نظرية ١٤ »

اى ضلع فى المثلث اكبر من فرق الضلعين الآخرين



(شكل ٣٠)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث مختلف الاضلاع

(المطلوب اثباته) ان أحد الاضلاع وليكن ب حـ > ا ب – ا حـ

(البرهان) ننصف ∠ ا ب حـ بالمستقيم ا هـ ثم نقيس على ا ب البعد ا ى = ا حـ ونصل من ى الى هـ

فى المثلثين ا ى هـ ، ا حـ هـ

بما أن
ا ى = ا حـ بالعمل
، ا هـ مشترك بين المثلثين
، ∠ ى ا هـ = ∠ حـ ا هـ بالعمل

يتساوى المثلثان ا ى هـ ، ا حـ هـ من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون هـ ى = هـ حـ

وفى △ ى ب هـ

ب هـ + هـ ى > ى ب (نظرية ١٣)

او ب هـ + هـ حـ > ى ب

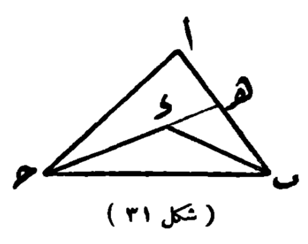
اى أن ب حـ > ى ب

ولكن ى ب = ا ب – ا ى = ا ب – ا حـ

اذن ب حـ > ا ب – ا حـ وهو المطلوب

« نظرية ١٥ »

اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصلت بطرفي احد اضلاعه كان مجموع المستقيمين اللذين وصلاها بهما أصغر من مجموع ضلعي المثلث المحيطين بهما وكانت الزاوية المحصورة بين هذين المستقيمين أكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث



(شكل ٣١)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث وان نقطة ء داخله

(المطلوب اثباته) ان ء حـ + ء ب < ا حـ + ا ب

وان ∠ ب ء حـ اكبر من ∠ ب ا حـ

(البرهان) اولا — نمد حـ ء الى ان يقابل ا ب في نقطة ه

في △ ا حـ ه   حـ ه < ا حـ + ا ه

أو   ه ء + ء حـ < ا حـ + ا ه

وفي △ ء ه ب   ء ب < ه ب + ه ء   وبالجمع

يكون ه ء + ء حـ + ء ب < ا حـ + (ا ه + ه ب) + ه ء

وبحذف المشترك ه ء من طرفي المتباينة مع مراعاة ان

ا ه + ه ب = ا ب

يكون ء حـ + ء ب < ا حـ + ا ب   وهو المطلوب

ثانيا — فى △ ا هـ حـ

الزاوية الخارجة ب هـ حـ > زاوية ا (نظرية ٩)

وفى △ ب ى هـ

الزاوية الخارجة حـ ى ب > زاوية ى هـ ب (نظرية ٩)

فن باب أولى تكون زاوية حـ ى ب > زاوية ا

وهو المطلوب

تمارين (٨)

(١) ا ب حـ مثلث نصفت زواياه ب ، حـ بمستقيمين تلاقيا فى نقطة ى فاذا كان ا ب > ا حـ فبرهن على أن ى ب > ى حـ

(٢) برهن على ان الوتر أكبر الاضلاع فى المثلث القائم الزاوية

(٣) ا ب حـ ى شكل رباعى ا ب أصغر اضلاعه ، حـ ى اكبرها والمطلوب البرهنة على ان ∠ ا أكبر من ∠ حـ ، ∠ ب أكبر من ∠ ى

(٤) برهن على ان كلا من ساقى المثلث المتساوى الساقين أكبر من نصف قاعدته

(٥) ا ب حـ مثلث فاذا فرضت نقطة مثل ى على ب حـ فبرهن على أن ا ى اصغر من نصف مجموع اضلاعه

(٦) ا ب حـ مثلث فاذا فرضت أى نقطة مثل ق فبرهن على ان ق ا + ق ب + ق حـ > نصف مجموع اضلاعه

(٧) استخدم العمل المتبع فى اثبات نظرية ١٤ لاثبات نظرية ١١

(٨) برهن على ان اطول اضلاع المثلث المنفرج الزاوية هو الضلع المقابل للزاوية المنفرجة

(٩) ا ب حـ مثلث فاذا رسم من ا العمود ا ء على ب حـ فبرهن على أن ا ب > ب ء ، ا حـ > حـ ء

(١٠) ا ب حـ مثلث رسم فيه عمودان احدهما من ب على ا حـ والثانى من حـ على ا ب فاذا تلاقى هذان العمودان فى نقطة س داخل المثلث وكان ا ب > ا حـ فبرهن على ان س ب > س حـ

(١١) ا ب حـ مثلث مد ضلعاه ا ب ، ا حـ على استقامتهما ثم نصفت الزاويتان الخارجتــان فاذا تلاقى هذا المنصفان فى نقطة هـ وكان ا ب > ا حـ فبرهن على ان هـ ب < هـ حـ

(١٢) اذا قطع مستقيم ساقى مثلث متساوى الساقين ا ب ، ا حـ فى نقطتى س ، ص وقطع القاعدة ب حـ ممتدة نحو حـ فبرهن على ان ا ص > ا س

(١٣) برهن على ان المستقيم الذى يصل رأس مثلث متساوى الساقين بنقطة على امتداد قاعدته اكبر من كل من ساقى المثلث

(١٤) برهن على ان المستقيم الذى يصل رأس مثلث متســاوى الساقين بنقطة على قاعدته أصغر من كل من ساقيه

(١٥) اثبت نظرية ١٤ باستخدام العمل المتبع فى اثبات نظرية ١١

(١٦) مجموع أى ثلاثة اضــلاع فى شكل رباعى أكبر من ضلعه الرابع

(١٧) ا ب حـ مثلث فرضت داخله نقطة مثل ء فاذا كان ء ا = ء ب ثم نصفت زاوية ب ا ء بمستقيم قطع ب حـ فى نقطة مثل هـ فبرهن على ان ب هـ = هـ ء ، حـ ب > حـ ء

(١٨) ا ب حـ مثلث فاذا فرضت نقطة مثل ء على ا حـ فبرهن على ان ب ا + ا حـ > ب ء + ء حـ

(١٩) مجموع اضلاع الشكل الرباعى اكبر من مجموع قطريه واصغر من ضعف هذا المجموع

(٢٠) اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رءوس زواياه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع اضلاعه

(٢١) مجموع اى ضلعين فى المثلث اكبر من ضعف المستقيم المتوسط المنصف للضلع الثالث

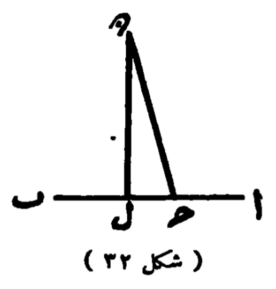
(٢٢) مجموع المستقيمات المتوسطة فى مثلث اصغر من مجموع اضلاعه واكبر من نصف هذا المجموع

(٢٣) برهن على ان مجموع قطرى الشكل الرباعى اكبر من مجموع اى ضلعين متقابلين فيه

(٢٤) برهن على ان مجموع قطرى الشكل الرباعى اصغر من مجموع المستقيمات الاربعة الواصلة من اى نقطة مفروضة (عدا نقطة تقاطع قطرية) الى رءوس الشكل

« نظرية ١٦ »

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها مستقيم وعدة موائل فان العمود يكون اقصر من كل مائل



(شكل ٣٢)

(المفروض) أن ﻫ ل هو العمود النازل من النقطة المفروضة ﻫ على المستقيم المعلوم ا ب وأن ﻫ ح احد الموائل الواصلة منها الى ا ب

(المطلوب اثباته) أن ﻫ ل أقصر من ﻫ ح

(البرهان) فى △ ﻫ ح ل

∠ ﻫ ح ل + ∠ ﻫ ل ح اصغر من قائمتين (نظرية ١٠)

وبما أن ∠ ﻫ ل ح = قائمة بالفرض

فتكون ∠ ﻫ ح ل اصغر من قائمة (حادة)

أى ان ∠ ﻫ ح ل اصغر من ∠ ﻫ ل ح

ويكون ﻫ ل اصغر من ﻫ ح (نظرية ١٢)

وهو المطلوب

« نظرية ١٧ »

(وهى عكس نظرية ١٦)

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها جملة مستقيمات تقابل المستقيم المفروض فان اقصر هـذه المستقيمات هو العمود المرسوم من النقطة على المستقيم المفروض

(المفروض) ان ﻫ ل (شكل ٣٢) أقصر من كل مستقيم واصل من نقطة ﻫ الى ا ب

(المطلوب اثباته) ان ﻫ ل عمودى على ا ب

(البرهان) أن لم يكن م ل عموديا على ا ب نرسم مستقيما آخر مثل م ح عموديا عليه (شكل ٣٢)

ومما تقدم فى نظرية ١٦ يكون م ح أقصر المستقيمات المرسومة من م الى ا ب

ولكن م ل أقصر المستقيمات المرسومة من م الى ا ب بالفرض

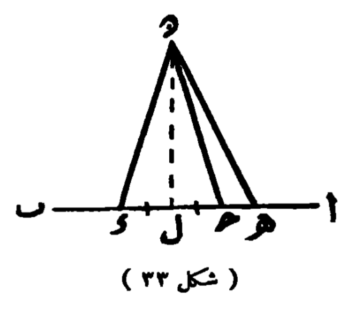
اذن م ح = م ل

وذلك لا يتأتى الا اذا انطبق المستقيمان م ح ، م ل

ويكون على ذلك م ل عموديا على ا ب وهو المطلوب

« نظرية ١٨ »

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها عدة موائل فان المائلين المتساويى البعد عن موقع العمود متساويان والمائلين المختلفى البعد عن موقع العمود مختلفان وأكبرهما ما كان بعده أكبر



(شكل ٣٣)

(المفروض) ان م ى ، م ح ، م ﻫ موائل مرسومة من نقطة

م الى ا ب وان ل ح = ل د ، ل ه > ل د مع العلم بأن م ل
هو العمود النازل من م على ا ب

(المطلوب اثباته) ان م ح = م د وان م ه > م د

(البرهان) أولا — فى المثلثين ح م ل ، د م ل

بما ان { ل ح = ل د بالفرض ، م ل مشترك بين المثلثين ، ∠ ح ل م = ∠ م ل د بالقيام }

يتساوى المثلثان ح م ل ، د م ل من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون م ح = م د وهو المطلوب

ثانيا — فى △ م ل ح بما ان ∠ م ل ح قائمة يجب ان تكون
∠ م ح ل حادة (نظرية ١٠)

وكذلك فى △ م ل ه بما ان ∠ م ل ه قائمة يجب ان تكون
∠ م ه ل حادة (نظرية ١٠)

ومن حيث ان ∠ م ح ل حادة فتكون مجاورتها ∠ م ح ه
منفرجة (نظرية ١)

اذن فى △ م ه ح تكون ∠ م ح ه أكبر من ∠ م ه ح

ويكون م ه > م ح (نظرية ١٢)

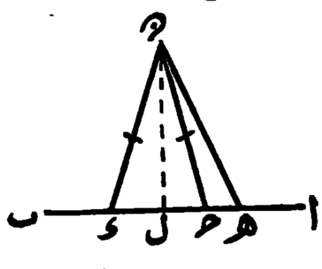
أو م ه > م د وهو المطلوب

« نظرية ١٩ »

(وهى عكس نظرية ١٨)

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها عدة موائل فكل مائلين

متساويين يكون بعداهما عن موقع العمود متسـاويين وكل مائلين مختلفين يكون بعداهما عن موقع العمود مختلفين و اكبر المائلين بعده اكبر



(شكل ٣٤)

(المفروض) ان م ء و م ح و م هـ موائل مرسومـة من نقطة م الى ا ب وان م ح = م ء و م هـ > م ء مع العلم بأن م ل هو العمود النازل من م على ا ب

(المطلوب اثباته) ان ل ح = ل ء وان ل هـ > ل ء

(البرهان) أولا — ان لم يكن ل ح مساويا ل ء فاما ان يكون اكبر منه وأما ان يكون اصغر منه

فان كان ل ح > ل ء

لزم ان يكون م ح > م ء (نظرية ١٨)

وهذا خلاف الفرض

وان كان ل ح < ل ء

لزم ان يكون م ح < م ء (نظرية ١٨)

وهذا خلاف الفرض ايضا

وعلى ذلك فالبعد ل ح لا يمكن ان يكون اكبر من ل ء كما انه لا يمكن ان يكون اصغر منه

اذن يجب ان يكون ل ح مساوياً ل ى وهو المطلوب

ثانيا — ان لم يكن ل هـ اكبر من ل ى

فاما ان يساويه واما ان يكون اصغر منه

فان كان ل هـ = ل ى

لزم ان يكون ح هـ = ح ى (نظرية ١٨)

وهذا خلاف الفرض

وان كان ل هـ > ل ى

لزم ان يكون ح هـ > ح ى (نظرية ١٨)

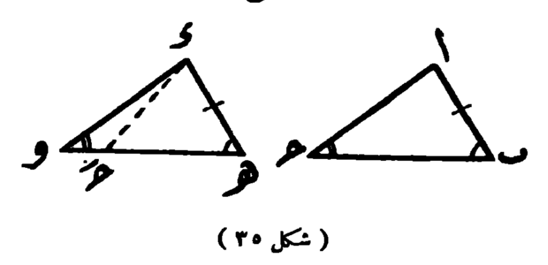
وهذا خلاف الفرض ايضا

وعلى ذلك فالبعد ل هـ لا يمكن ان يساوى ل ى كما انه لا يمكن ان يكون اصغر منه

اذن يجب ان يكون ل هـ اكبر من ل ى وهو المطلوب

« نظرية ٢٠ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما زاويتان وضلع مقابل لاحدى هاتين الزاويتين كل مع نظيره



(شكل ٣٥)

(المفروض) ان ا ب حـ ، ء هـ و مثلثان فيهما ∠ ب = ∠ هـ ، ∠ حـ = ∠ و والضلع ا ب = ء هـ

(المطلوب اثباته) ان △ ا ب حـ = △ ء هـ و من عامة الوجوه

(البرهان) نطبق △ ا ب حـ على △ ء هـ و على شرط ان تقع النقطة ا على النقطة ء ويأخذ الضلع ا ب الاتجاه ء هـ

وبما ان ا ب = ء هـ فتقع نقطة ب على نقطة هـ

وبما ان ا ب انطبق على ء هـ ، ∠ ا ب حـ = ∠ ء هـ و فيقع ب حـ على هـ و

وبعد ذلك ان وقعت نقطة حـ على نقطة و انطبق المثلثان وثبت المطلوب

وان لم تقع نقطة حـ على نقطة و وقعت على هـ و أو على امتداده حسبما يكون ب حـ اصغر او اكبر من هـ و

وللسهولة فى العمل نفرض ان ب حـ > هـ و وان نقطة حـ وقعت على هـ و واخذت الوضع حـ´ والضلع ا حـ اخذ الوضع ء حـ´

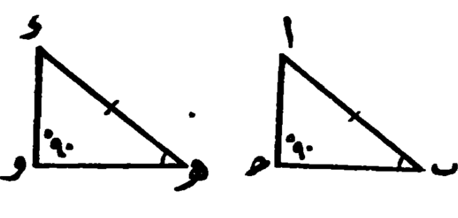
فى △ ء حـ´ و الزاوية هـ حـ´ ء الخارجة اكبر من ∠ ء و حـ´ اى ان ∠ ا حـ ب اكبر من ∠ ء و هـ وهذا خلاف الفرض

وكذلك ان وقعت نقطة حـ عند التطبيق على امتداد هـ و اختلفت الزاويتان ا حـ ب ، ء و هـ فى المقدار وكانت ∠ ا حـ ب اصغر من ∠ ء و هـ وهذا خلاف الفرض ايضاً

وعلى ذلك فالنقطة حـ لا يمكن ان تقع الا على نقطة و

وبذلك ينطبق △ ا ب حـ على △ ء هـ و ويتساويان من عامة الوجوه وهو المطلوب

(نتيجة) يتساوى المثلثان القائما الزاوية من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما وتر وزاوية حادة كل مع نظيره



(شكل ٣٦)

(المفروض) ان المثلثين ا ب حـ ، ى هـ و قائما الزاوية الاول فى حـ والثانى فى و وأن الوتر ا ب = ى هـ والزاوية الحادة ا ب حـ = ∠ ى هـ و

(المطلوب اثباته) ان المثلث ا ب حـ = المثلث ى هـ و من عامة الوجوه

(البرهان) فى المثلثين ا ب حـ ، ى هـ و

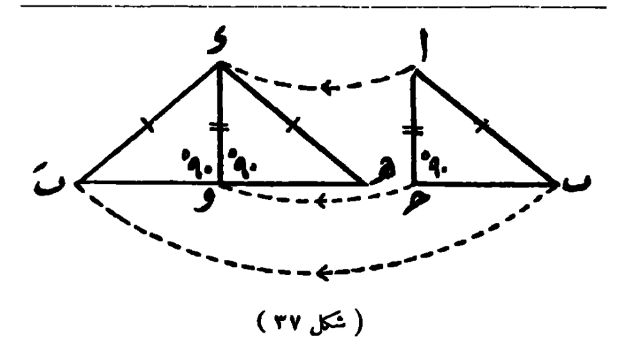
بما ان { ∠ حـ = ∠ و بالقيام ، ∠ ب = ∠ هـ بالفرض ، ا ب = ى هـ بالفرض }

فينطبق △ ا ب حـ على △ ى هـ و (نظرية ٢٠)

و بذلك يتساويان من عامة الوجوه (وهو المطلوب)

« نظرية ٢١ »

يتساوى المثلثان القائما الزاوية من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما وتر وضلع كل مع نظيره



(شكل ٣٧)

(المفروض) ان المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و قائما الزاوية الاول في حـ والثانى فى و وان الوتر ا ب = الوتر ء هـ والضلع ا حـ = الضلع ء و

(المطلوب اثباته) ان المثلث ا ب حـ = المثلث ء هـ و من عامة الوجوه

(البرهان) نضع المثلث ا ب حـ بجانب المثلث ء هـ و بحيث يقع الضلع ا حـ على مساويه ء و ويأخذ المثلث ا ب حـ الوضع ء بَ و

بما ان كلا من ∠ ء و هـ ، ∠ ء و بَ قائمة

يكون المستقيم بَ و على استقامة و هـ ويكون ء هـ بَ مثلثا فيه الضلع ء هـ = ء بَ (لان كلا منهما = ا ب)

اذن ∠ ء بَ هـ = ∠ ء هـ بَ (نظرية ٦)

أى ان ∠ ا ب حـ = ∠ ء هـ و

وعلى ذلك ففى المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و

من حيث ان { ∠ ا ح ب = ∠ ء و ﻫ بالقيام ، ∠ ا ب ح = ∠ ء ﻫ و بالاثبات ، ا ب = ء ﻫ بالفرض }

فينطبق المثلث ا ب ح على المثلث ء ﻫ و (نظرية ٢٠)

و بذلك يتساويان من عامة الوجوه وهو المطلوب

تمارين (٩)

(١) نقطة ح هى منتصف المستقيم ا ب والمطلوب البرهنة على ان العمودين النازلين من ا ، ب على اى مستقيم آخر يمر بها متساويان

(٢) ا ب ح ، ء ﻫ و مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا رسم ا س عموديا على ب ح ورسم ء ص عموديا على ﻫ و فبرهن على ان ا س = ء ص

(٣) اذا فرضت نقطة على منصف زاوية فبرهن على ان العمودين النازلين منها على ضلعى الزاوية متساويان

(٤) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح فاذا نصفت القاعدة ب ح فى نقطة ء فبرهن على ان العمودين النازلين من هذه النقطة على ساقى المثلث متساويان

(٥) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح والمطلوب البرهنة على ان العمودين النازلين من ب ، ح على ساقى المثلث متساويان

(٦) فى المسألة السابقة اذا فرض ان العمودين تلاقيا فى نقطة س فبرهن على أن س ب = س حـ

(٧) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين رسم فيه المستقيم ا ء عموديا على ب حـ والمطلوب البرهنة على ان المثلث ب ا ء = المثلث حـ ا ء من عامة الوجوه

(٨) اذا فرضت نقطة مثل ۞ وكان العمودان النازلان منها على ضلعى زاوية مفروضة ب ا حـ متساويين فبرهن على ان ۞ ا ينصف هذه الزاوية

(٩) اذا نصفت قاعدة مثلث بنقطة وكان العمودان النازلان منها على ضلعى المثلثين الآخرين متساويين فبرهن على ان المثلث متساوى الساقين

(١٠) اذا كان العمودان النازلان من نهايتى قاعدة مثلث على ضلعيه الآخرين متساويين فبرهن على ان المثلث متساوى الساقين

« نظرية ٢٢ »

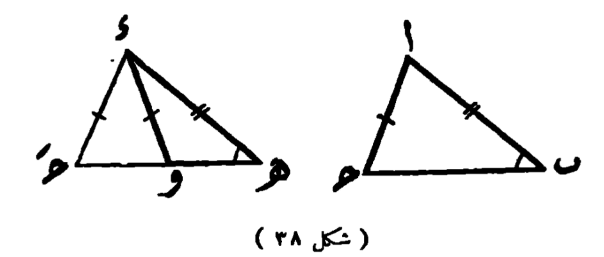
اذا ساوى ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى المثلث الاول أكبر من نظيرتها فى الثانى كان الضلع الثالث من المثلث الاول أكبر من نظيره فى المثلث الثانى

(المفروض) ان المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و فيهما الضلع ا ب = ء هـ ، ا حـ = ء و ، ∠ ب ا حـ اكبر من ∠ هـ ء و

المطلوب اثباته) ان ب حـ > هـ و

(البرهان) قبل الشروع فى اثبات هذه النظرية تجب معرفة ما تساويه ∠ ب بالنسبة الى نظيرتها ∠ هـ فتارة تفرض انهما متساويتان وتارة تفرض ان ∠ ب اكبر من ∠ هـ وتارة تفرض ان ∠ ب اصغر من ∠ هـ لان لكل حالة طريقة خاصة ووضع خاص لاثباتها

الحاله الاولى — عند ما تكون ∠ ب = ∠ هـ (شكل ٣٨)



(شكل ٣٨)

نطبق المثلث ا ب حـ على ء هـ و بحيث تقع النقطة ا على النقطة ء ويقع الضلع ا ب على مساويه ء هـ

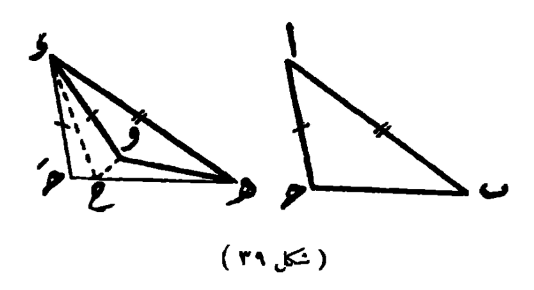
وبما ان الضلع ا ب وقع على ء هـ وكانت ∠ ا اكبر من ∠ هـ ء و بالفرض فلا بد ان يقع ا حـ على يسار ء و ويأخذ الوضع ء حَ

وبما ان ا ب وقع على ء هـ وقد سلمنا بأن ∠ ب = ∠ هـ فلا بد أن يقع ب حـ على هـ و ويأخذ المثلث ا ب حـ الوضع ء هـ حَ

ويكون هـ حَ > هـ و (لان الكل اكبر من الجزء)

اى ان ب حـ > هـ و وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عند ما تكون ∠ ب اكبر من ∠ هـ (شكل ٣٩)



(شكل ٣٩)

نطبق المثلث ا ب ﺣ على المثلث ء ﻫ و فبعد ان تقع النقطة ا على النقطة ء ويقع الضلع ا ب على ء ﻫ ويقع ا ﺣ على يسار ء و ويأخذ الوضع ء ﺣَ نقول

بما ان ا ب وقع على ء ﻫ وقد سلمنا بأن ∠ ب ا كبر من ∠ ﻫ فلا بد ان يقع ب ﺣ أسفل ﻫ و ويأخذ المثلث ا ب ﺣ الوضع ء ﻫ ﺣَ

ثم ننصف ∠ و ء ﺣَ بالمستقيم ء ع الذى يقابل ﻫ ﺣَ فى ع ونصل بين ع ، و

ففى المثلثين و ء ع ، ﺣَ ء ع

بما ان { و ء = ﺣَ ء بالفرض
، ء ع مشترك بين المثلثين
، ∠ و ء ع = ∠ ﺣَ ء ع بالعمل }

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وينتج من تساويهما ان و ع = ع ﺣَ

وفى △ ﻫ و ع

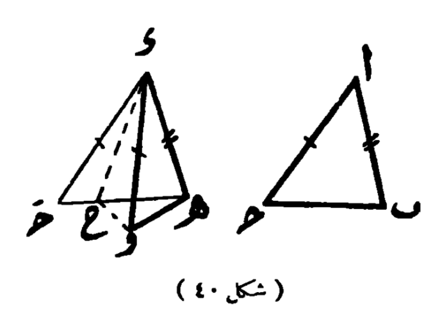
ﻫ ع + ع و > ﻫ و (نظرية ١٣)

فيكون هـ ح + ح حَ > هـ و

أى ان هـ حَ > هـ و

أو ب حـ > هـ و وهو المطلوب

(الحالة الثالثة) عند ما تكون ∠ ب اصغر من ∠ هـ (شكل ٤٠)



(شكل ٤٠)

نطبق المثلث ا ب حـ على المثلث ى هـ و كما تقدم فى الحالتين السابقتين فبعد ان تقع النقطة ا على النقطة ى ويقع الضلع ا ب على مساويه ى هـ ويقع ا حـ على يسار ى و ويأخذ الوضع ى حَ نقول

بما ان ا ب وقع على ى هـ وقد سلمنا بأن ∠ ب اصغر من ∠ هـ فيقع الضلع ب حـ أعلى هـ و ويأخذ المثلث ا ب حـ الوضع ى هـ حَ

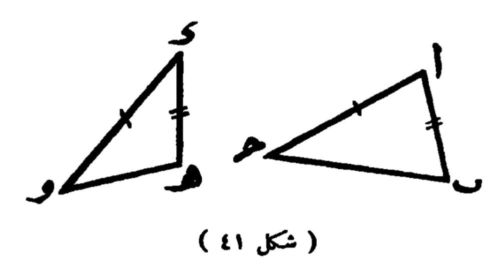
ثم نستمر فى البرهنة بنفس الطريقة المتعبة فى اثبات الحالة الثانية

وبذلك يكون ب حـ > هـ و وهو المطلوب

« نظرية ٢٣ »

(وهى عكس نظرية ٢٢)

اذا ساوى ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر وكان الضلع الثالث فى المثلث الاول اكبر من نظيره فى المثلث الثانى كانت الزاوية المحصورة بين الضلعين فى المثلث الاول اكبر من نظيرتها فى المثلث الثانى



(شكل ٤١)

(المفروض) ان المثلثين ا ب حـ ، ى هـ و فيهما الضلع ا ب = ى هـ ، ا حـ = ى و ، ب حـ > هـ و

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ اكبر من ∠ هـ ى و

(البرهان) ان لم تكن ∠ ب ا حـ اكبر من ∠ هـ ى و فاما ان تساويها واما ان تكون اصغر منها

فان كانت ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ى و

كان المثلث ب ا حـ = المثلث هـ ى و (نظرية ٤)

ولزم ان يكون ب حـ = هـ و

وهذا خلاف الفرض

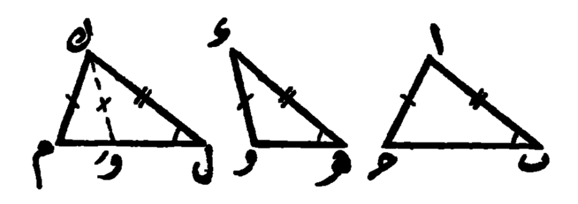
وان كانت ∠ ب ا حـ اصغر من ∠ هـ ى و

لزم ان يكون ب حـ اصغر من هـ و (نظرية ٢٢)
وهذا خلاف الفرض ايضاً
وعلى ذلك فالزاوية ب ا حـ لا يمكن ان تساوى الزاوية هـ ى و
كما انه لا يمكن ان تكون اصغر منها
اذن يجب ان تكون ∠ ب ا حـ اكبر من ∠ هـ ى و

وهو المطلوب

« نظرية ٢٤ »

اذا ساوى ضلعان فى مثلث نظريهما فى مثلث آخر وكانت احدى الزوايا المقابلة لضلع من الضلعين المتساويين تساوى نظريتها فى المثلث الثانى كانت الزاوية المقابلة للضلع الآخر تساوى نظريتها أو تكملها وفى حالة التساوى يكون المثلثان متساويين من عامة الوجوه



(شكل ٤٢)

(المفروض) ان المثلثين ك ل م ، ى هـ و فيهما الضلع ك ل = ى هـ
، ل م = ى و ، ∠ ك ل م = ∠ ى هـ و

(المطلوب اثباته) ان ∠ م تساوى ∠ و أو تكملها وانه فى حالة التساوى ينطبق المثلث ك ل م على المثلث ى هـ و

(البرهان) الزاوية ل ك م المحصورة بين الضلعين المشار اليهما اما ان تساوى نظيرتها ⊿ ى اولا تساويها

فان كانت ⊿ ل ك م = ⊿ ه ى و

كان المثلث ل ك م = المثلث ه ى و من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وتكون ⊿ م = ⊿ و

[يحسن بالطالب هنا ان يرجع الى المثلثين المتساويين ك ل م ، ا ب ح (شكل ٤٢) اللذين فيهما ا ب = ك ل ، ا ح = ك م ، ⊿ ب = ⊿ ل]

وان كانت ⊿ ل ك م لا تساوى ⊿ ه ى و بأن كانت الاولى اكبر من الثانية مثلا نطبق المثلث ى ه و على المثلث ك ل م كما فعلنا عند اثبات الحالة الاولى من نظرية ٢٢ فيأخذ المثلث ى ه و الوضع ك ل و´

ومن حيث ان ى و = ك و´

فيكون ك م = ك و´

وتكون ⊿ ك و´ م = ⊿ م (نظرية ٦)

ولكن ⊿ ك و´ م تكمل ⊿ ك و´ ل (نظرية ١)

اذن ⊿ م تكمل ⊿ ك و´ ل

اى ان ⊿ م تكمل ⊿ و وهو المطلوب

تمارين (١٠)

(١) ا ب ح ى شكل رباعى فيه ا ى = ب ح ، ⊿ ا ى ح اكبر من ⊿ ب ح ى والمطلوب البرهنة على ان ا ح > ب ى

(٢) ا ب ح مثلث اخذ على ضلعيه ا ب ، ا ح البعدان المتساويان

ب ى ، حـ هـ فاذا كان ا ب > ا حـ فبرهن على ان
ب هـ > حـ ى

(٣) ا ب حـ مثلث مد ضلعاه ا ب ، ا حـ الى ى ، هـ بحيث
ان ب ى = حـ هـ فاذا كان ا ب > ا حـ فبرهن على ان
حـ ى > ب هـ

(٤) ا ب حـ مثلث فيه ا ب > ا حـ فاذا فرض ان ى منتصف
ب حـ فبرهن على ان ∠ ا ى حـ حادة

(٥) ا ى المستقيم المتوسط للمثلث ا ب حـ فاذا فرضت أى نقطة
ﻫ على ا ى وكان ا ب > ا حـ فبرهن على ان ﻫ ب > ﻫ حـ

(٦) ا ب حـ مثلث اخذ على ضلعيه ا ب ، ا حـ البعدان المتساويان
ب ى ، حـ هـ فاذا كان ب هـ > حـ ى فبرهن على ان ا ب > ا حـ

(٧) ا ب حـ ى شكل رباعى فيه ا ى = ب حـ ، ا حـ > ب ى
والمطلوب البرهنة على ان ∠ ا ى حـ اكبر من ∠ ب حـ ى

(٨) ا ب حـ ى شكل رباعى فيه ا ى = ب حـ ، ا ب > حـ ى
والمطلوب البرهنة على ان ∠ ى ا حـ اكبر من ∠ ا حـ ب

(٩) ا ب حـ ى شكل رباعى فيه ا ى = ب حـ ، ∠ ا ى حـ اكبر
من ∠ ب حـ ى والمطلوب البرهنة على ان ∠ ا ب حـ اكبر
من ∠ ب ا ى

(١٠) ا ب حـ مثلث مد ضلعاه ا ب ، ا حـ الى ى ، هـ بحيث ان ب ى
= حـ هـ فاذا كان حـ ى > ب هـ فبرهن على ان ا ب > ا حـ

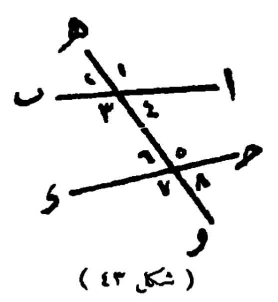
الباب الرابع

فى المتوازيات

(تعريف) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان فى مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا

(بديهية) لا يمكن ان يمد من نقطة خارج مستقيم الا مستقيم واحد يوازيه

(تعاريف) اذا قطع المستقيم هـ و المستقيمين ا ب ، حـ ء نشأ عن هذا التقاطع ثمانى زوايا تعرف باسماء خاصة اصطلح بها على تسميتها



(شكل ٤٣)

ففى شكل (٤٣)

(١) الزوايا ١ و ٢ و ٧ و ٨ تسمى خارجة

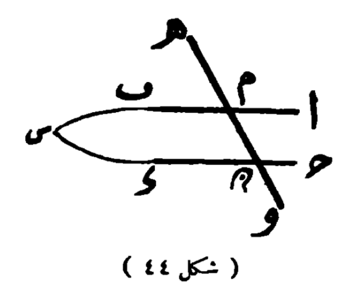
(٢) والزوايا ٣ و ٤ و ٥ و ٦ تسمى داخلة

(٣) والزاويتان ١ و ٧ تسميان متبادلتين من الخارج وكذا الزاويتان ٢ و ٨

(٤) والزاويتان ٣ و ٥ تسميان متبادلتين من الداخل وكذا ٤ و ٦
(٥) والزاويتان ١ و ٥ تسميان متناظرتين وكذا ٢ و ٦ ، ٤ و ٨ ، ٣ و ٧
(٦) والزاويتان ١ و ٨ تسميان متجانبتين من الخارج وكذا ٢ و ٧
(٧) والزاويتان ٤ و ٥ تسميان متجانبتين من الداخل وكذا ٣ و ٦

« نظرية ٢٥ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك ان زاويتين متبادلتين داخلتين أو خارجتين متساويتان كان المستقيمان متوازيين



(شكل ٤٤)

(المفروض) ان المستقيم هـ و يقطع المستقيمين ا ب ، حـ ى فى م ، ن وان الزاويتين المتبادلتين الداخلتين ب م ن ، حـ ن م متساويتان

(المطلوب اثباته) ان ا ب يوازى حـ ى

(البرهان) ان لم يكن ا ب ، حـ ى متوازيين فلا بد أن يتلاقيا فى نقطة مثل س ويكون س م ن مثلثاً

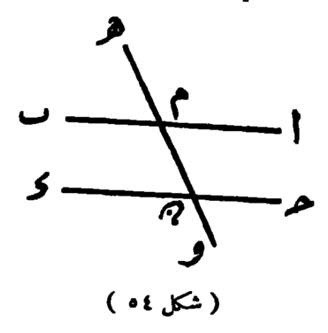
فى المثلث س م ن الزاوية الخارجة حـ ن م > الزاوية ب م ن
وهذا يستحيل اذ انهما متساويتان بالفرض
وقد نشأ المستحيل بفرضنا ان ا ب يتلاقى مع حـ ء
اذن لا يمكن تلاقيهما وبذا يكونان متوازيين وهو المطلوب

(تنبيه) عند ما يفرض تساوى زاويتين متبادلتين من الخارج مثل زاويتى ا م هـ و و ن ء نستمر فى الاثبات بأن نقول

ان ∠ ا م هـ = ∠ ب م ن بالتقابل بالرأس
و ∠ و ن ء = ∠ حـ ن م « «
اذن ∠ ب م ن = ∠ حـ ن م
وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل
اذن ا ب يوازى حـ ء وهو المطلوب

« نظرية ٢٦ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك ان زاويتين متناظرتين متساويتان أو ان مجموع اى زاويتين متجانبتين داخلتين او خارجتين يساوى قائمتين كان المستقيمان فى كلتا الحالتين متوازيين



(شكل ٥٤)

(المفروض) ان المستقيم هـ و يقطع المستقيمين ا ب ، حـ ء فى م ، ن وكانت

∠ ا م هـ = ∠ حـ ن م

أو ∠ ب م ن + ∠ ء ن م = ٢ ق

أو ∠ ا م هـ + ∠ حـ ن و = ٢ ق

(المطلوب اثبـاته) انه فى كل حالة من الاحوال الثلاثة يكون المستقيمان ا ب ، حـ ء متوازيين

(الحالة الاولى) ∠ ا م هـ = ∠ ب م ن بالتقابل بالرأس

، ∠ ا م هـ = ∠ حـ ن م بالفرض

اذن ∠ ب م ن = ∠ حـ ن م

وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل

اذن ا ب يوازى حـ ء وهو المطلوب

(الحالةالثانية) ∠ ب م ن + ∠ ا م ن = ٢ ق (نظرية ١)

، ∠ ب م ن + ∠ ء ن م = ٢ ق بالفرض

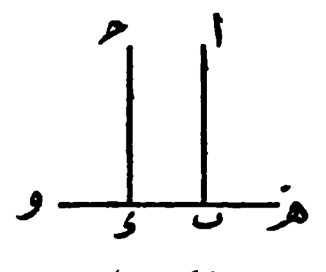
اذن ∠ ا م ن = ∠ ء ن م

وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل

اذن ا ب يوازى حـ ء وهو المطلوب

(الحالة الثالثة) نستخدم فى اثبـات الحالة الثالثة نفس الطريقة المتبعة فى اثبات الحالة الثانية و بذلك يثبت المطلوب

(نتيجة) المستقيمان العمودان على ثالث يكونان متوازيين



(شكل ٤٦)

(المفروض) ان كلا من ا ب ، حـ ى عمودى على هـ و

(المطلوب اثباته) أن ا ب يوازى حـ ى

(البرهان) ∠ هـ ب ا = ∠ ب ى حـ بالقيام

وهاتانان الزاويتان متناظرتان

اذن ا ب يوازى حـ ى (نظرية ٢٦) ويثبت المطلوب

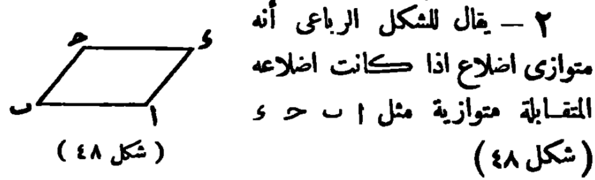
تعاريف

١ — علمنا فيما مضى ان الشكل الرباعى هو مضلع يحيط به اربعة اضلاع مثل ا ب حـ ى (شكل ٤٧)

(شكل ٤٧)

ويقال للمستقيم الذى يصل رأسين متقابلين فيه القطر مثل ى ب

٢ — يقال للشكل الرباعى أنه متوازى اضلاع اذا كانت اضلاعه المتقابلة متوازية مثل ا ب حـ ى (شكل ٤٨)



(شكل ٤٨)

ففى هذا الشكل الرباعى ا ب يوازى ى ح ، ى ا يوازى ح ب

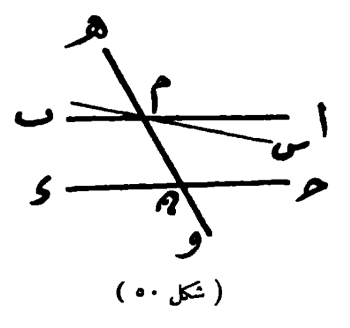
٣ — يقال للشكل الرباعى انه شبه منحرف اذا كان فيه ضلعــان متوازيان وضلعان غير متوازيين مثل ا ب ح ى (شكل ٤٩)

(شكل ٤٩)

ففى هذا الشكل ا ب يوازى ى ح ولكن ى ا لا يوازى ح ب

« نظرية ٢٧ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين حدث من ذلك ان كل زوايتين متبادلتين داخلتين او خارجتين متساويتان



(شكل ٥٠)

(المفروض) ان المستقيم ا ب يوازى ح ى وأن المستقيم ه و يقطعهما فى م ، ن

(المطلوب اثباته) ان ∠ ا م ن = ∠ ى ن م

(البرهان) ان لم تكن الزاوية ا م ن تساوى الزاوية ى ن م

نرسم م س كى يصنع مع ۿ م الزاوية ۿ م س = الزاوية ى ۿ م

فيكون م س يوازى حـ ى (نظرية ٢٦)

ولكن م ا يوازى حـ ى بالفرض

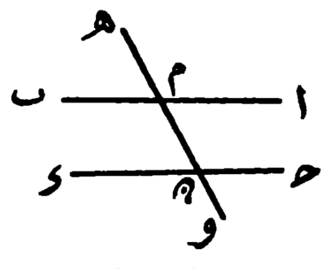
و بذلك يكون قد أمكن رسم مستقيمين يوازيان المستقيم حـ ى من نقطة واحدة وهذا مستحيل بداهة

اذن ∠ ا م ۿ لا بد ان تساوى ∠ ى ۿ م وهو المطلوب

(ملاحظة) الزوايا المتبادلة من الخارج تساوى الزوايا المتبادلة من الداخل بالتقابل بالرأس فمتى ثبت تساوى الاولى يثبت تساوى الثانية

« نظرية ٢٨ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين حدث من ذلك ان كل زاويتين متناظرتين متساويتان وان مجموع اى زاويتين متجانبتين داخلتين أو خارجتين يساوى قائمتين



(شكل ٥١)

(المفروض) ان المستقيم ا ب يوازى حـ ى وان المستقيم ۿ و يقطعهما فى م ، ۿ

(المطلوب اثباته) ان ∠ ا م هـ = ∠ حـ ح م

وان ∠ ب م ح + ∠ ى ح م = ٢ ق

وان ∠ ا م هـ + ∠ حـ ح و = ٢ ق

(البرهان) اولا — ∠ ا م هـ = ∠ ح م ب بالتقابل بالرأس

، ∠ حـ ح م = ∠ ح م ب بالتبادل (نظرية ٢٧)

اذن ∠ ا م هـ = ∠ حـ ح م وهو المطلوب

ثانياً — ∠ ب م ح + ∠ ح م ا = ٢ ق (نظرية ١)

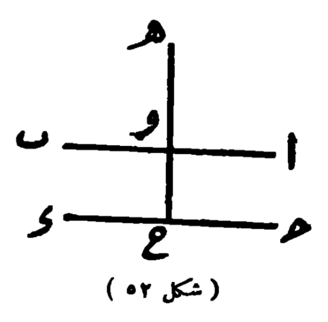
∠ ى ح م = ∠ ح م ا بالتبادل (نظرية ٢٧)

اذن ∠ ب م ح + ∠ ى ح م = ٢ ق وهو المطلوب

ثالثاً — يمكن بنفس الطريقة المتبعة فى الحالة الثانية اثبات ان

∠ ا م هـ + ∠ حـ ح و = ٢ ق

(نتيجة) كل مستقيم عمودى على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر



(شكل ٥٢)

(المفروض) ان ا ب يوازى حـ ى وان هـ و ح عمودى على ا ب

(المطلوب اثباته) ان هـ و ح عمودى على حـ ى ايضاً

(البرهان) ∠ حـ ح و = ∠ ا و هـ بالتناظر

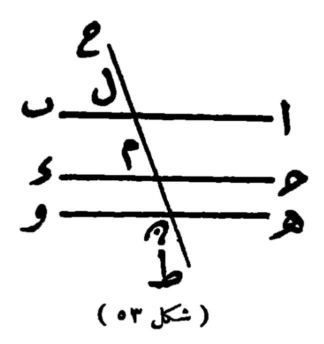
ولكن ∠ ا و هـ = قائمة بالفرض

اذن ∠ حـ ح و = قائمة كذلك

وبذا يكون هـ و ح عمودياً على حـ ء وهو المطلوب

« نظرية ٢٩ »

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان



(شكل ٥٣)

(المفروض) ان كلا من ا ب ، حـ ء يوازى هـ و

(المطلوب اثباته) ان ا ب يوازى حـ ء

(البرهان) نرسم المستقيم ح ط كى يقطع ا ب فى ل ، حـ ء فى م ، هـ و فى ن

فبما ان ا ب يوازى هـ و بالفرض

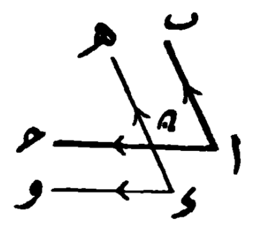
تكون ∠ هـ ن ل = ∠ ا ل ح بالتناظر

وكذلك بما ان حـ ء يوازى هـ و بالفرض

تكون ∠ هـ م م = ∠ حـ م ل بالتناظر
اذن ∠ ا ل ح = ∠ حـ م ل
وهاتان الزاويتان متناظرتان
اذن ا ب يوازى حـ ء (نظرية ٢٨) وهو المطلوب

« نظرية ٣٠ »

اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى وكان اتجاه ضلعي الزاوية الاولى فى اتجاه ضلعي الزاوية الثانية كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٤)

(المفروض) ان ب ا حـ ، هـ ء و زاويتان فيهما الضلع ا ب يوازى ء هـ والضلع ا حـ يوازى ء و وان ا ب ، ء هـ مرسومان فى اتجاه واحد وكذا ا حـ ، ء و مرسومان فى اتجاه واحد

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و

(البرهان) ∠ ب ا م = ∠ هـ م حـ بالتناظر
، ∠ م ء و = ∠ هـ م حـ بالتناظر
اذن ∠ ب ا م = ∠ م ء و
اى ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ء و وهو المطلوب

« نظرية ٣١ »

اذا وازى ضلعا زاوية ضلعى زاوية اخرى وكان اتجاه ضلعى الزاوية الاولى يضاد اتجاه ضلعى الزاوية الثانية كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٥)

(المفروض) ان ب ا حـ ، هـ ى و زاويتان فيهما الضلع ا ب يوازى ى هـ والضلع ا حـ يوازى ى و وان ا ب ، ى هـ مرسومان فى اتجاهين متضادين وكذا ا حـ ، و ى مرسومان فى اتجاهين متضادين

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ى و

(البرهان) ∠ ب ا م = ∠ ى م حـ بالتناظر

، ∠ و ى م = ∠ ى م حـ بالتبادل

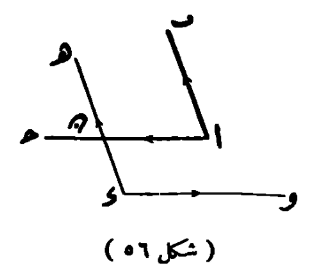
اذن ∠ ب ا م = ∠ و ى م

اى ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ى و

وهو المطلوب

« نظرية ٣٢ »

اذا وازى ضلعا زاوية ضلعى زاوية أخرى وكان اتجاه أحد ضلعى الزاوية فى اتجاه الضلع الذى يوازيه واتجاه الضلع الثانى فى اتجاه يضاد اتجاه الضلع الذى يوازيه كانت الزاويتان متكاملتين



(شكل ٥٦)

(المفروض) ان ب ا ح ، هـ ء و زاويتان فيهما الضلع ا ب يوازى ء هـ والضلع ا ح يوازى ء و وان ا ب ، ء هـ مرسومان فى اتجاه واحد والضلعين ا ح ، ء و مرسومان فى اتجاهين متضادين

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا ح + ∠ هـ ء و = ٢ ق

(البرهان) ∠ ب ا م + ∠ هـ م ا = ٢ ق

(نظرية ٢٨)

ولكن ∠ و ء م = ∠ هـ م ا بالتناظر

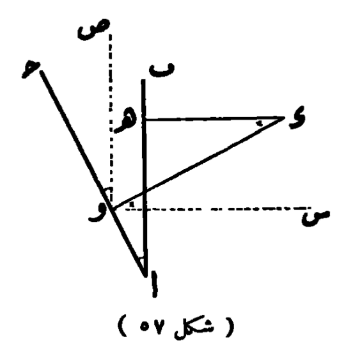
اذن ∠ ب ا م + ∠ و ء م = ٢ ق

اى ان ∠ ب ا ح + ∠ هـ ء و = ٢ ق

وهو المطلوب

« نظرية ٣٣ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعي زاوية أخرى وكانت كل منهما حادة كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٧)

(المفروض) ان ب ا حـ ، هـ ى و زاويتان فيهما الضلع ى هـ عمودى على ا ب والضلع ى و عمودى على ا حـ وان كلا من الزاويتين حادة

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ى و

(البرهان) نرسم من نقطة و المستقيم و ص يوازى ا ب والمستقيم و س يوازى ى هـ فيكون و ص عمودياً على و س

وتكون ∠ ص و ى + ∠ ى و س = ق

ولكن ∠ حـ و ص + ∠ ص و ى = ق بالفرض

اذن ∠ حـ و ص = ∠ ى و س

ولكن ∠ حـ و ص = ∠ و ا ب بالتناظر

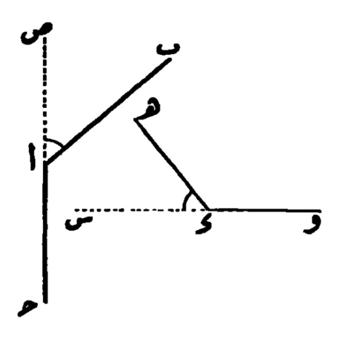
، ∠ ى و س = ∠ هـ ى و بالتبادل

اذن ∠ و ا ب = ∠ هـ ى و

اى ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ى و وهو المطلوب

« نظرية ٣٤ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعى زاوية آخرى وكانت كل منهما منفرجة كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٨)

(المفروض) ان ب ا حـ ، هـ ى و زاويتان فيهما الضلع ى هـ عمودى على ا ب والضلع ى و عمودى على ا حـ وان كلا من الزاويتين منفرجة

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا حـ = ∠ هـ ى و

(البرهان) نمد الضلع حـ ا الى ص والضلع و ى الى س فيكون ى س عمودياً على ا ص

ومن حيث ان كلا من الزاويتين ب ا ص ، ﻫ ى س حادة

فتكون ∠ ب ا ص = ∠ ﻫ ى س (نظرية ٣٣)

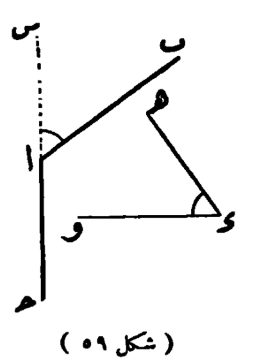
ولكن ∠ ب ا ح + ∠ ب ا ص = ٢ ق

، ∠ ﻫ ى و + ∠ ﻫ ى س = ٢ ق

اذن ∠ ب ا ح = ∠ ﻫ ى و وهو المطلوب

« نظرية ٣٥ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعى زاوية اخرى وكانت احداهما حادة والاخرى منفرجة كانت الزاويتان متكاملتين



(شكل ٥٩)

(المفروض) ان ب ا ح ، ﻫ ى و زاويتان فيهما الضلع ى ﻫ عمودى على ا ب والضلع ى و عمودى على ا ح وأن ∠ ب ا ح منفرجة ، ∠ ﻫ ى و حادة

(المطلوب اثباته) ان ∠ ب ا ح + ∠ ﻫ ى و = ٢ ق

(البرهان) نمد حـ ا الى س فيكون ء و عموديا على ا س

وبما أن كلا من زاويتى هـ ء و ، ب ا س حادة

فتكون ∠ هـ ء و = ∠ ب ا س (نظرية ٣٣)

ولكن ∠ ب ا حـ + ∠ ب ا س = ٢ ق (نظرية ١)

اذن ∠ ب ا حـ + ∠ هـ ء و = ٢ ق وهو المطلوب

تمارين (١١)

(١) ا ب حـ ء شكل رباعى رسم فيه القطر ا حـ فاذا كانت ∠ ب ا حـ = ∠ ا حـ ء ، ∠ ء ا حـ = ∠ ا حـ ب فبرهن على ان هذا الشكل الرباعى متوازى الاضلاع

(٢) ا ب حـ ء متوازى اضلاع رسم فيه القطر ا حـ ثم مد ب حـ الى هـ والمطلوب بيان ازواج الزوايا المتساوية مع بيان السبب

(٣) ا ب حـ مثلث فاذا رسم المستقيم ء هـ يوازى ب حـ ويقطع ا ب فى ء ، ا حـ فى هـ وكانت ∠ ب = ∠ حـ فبرهن على ان ∠ ا ء هـ = ∠ ا هـ ء

(٤) برهن على ان مجموع زوايا متوازى الاضلاع يساوى اربع قوائم

(٥) برهن على ان كل زاويتين متقابلتين فى متوازى الاضلاع متساويتان

(٦) اذا كانت احدى زوايا متوازى الاضلاع قائمة فبرهن على ان كلا من زواياه الثلاث الباقية قائمة كذلك

(٧) ا ب حـ ء شكل رباعى فاذا كانت فيه ∠ ا + ∠ ب = ٢ ق فبرهن على ان ∠ حـ + ∠ ء = ٢ ق كذلك

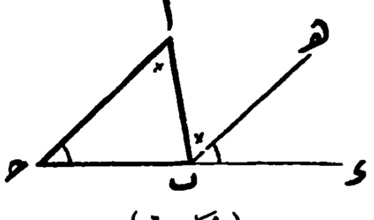
(٨) اذا فرضت نقطة على منصف زاوية ورسم منها مستقيم يوازى احد ضلعيها فبرهن على ان المثلث الحادث متساوى الساقين

(٩) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ضلعان متقابلان متوازيان والمطلوب البرهنة على ان مجموع زواياه يساوى اربع قوائم

(١٠) اذا رسم من نقطة على منصف زاوية مستقيمان يوازيان ضلعيها ويقابلانهما فبرهن على ان اضلاع الشكل الرباعى الحادث متساوية

« نظرية ٣٦ »

مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين



(شكل ٦٠)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث

(المطلوب اثباته) ان

∠ ب ا حـ + ∠ ا ب حـ + ∠ ب حـ ا = ٢ ق

(البرهان) نمد حـ ب على استقامته الى ء ونرسم ب هـ يوازى حـ ا

فتكون ∠ ب ا حـ = ∠ ا ب هـ بالتبادل

، ∠ ا حـ ب = ∠ هـ ب ء بالتناظر

اذن ∠ ب ا حـ + ∠ ا حـ ب = ∠ ا ب هـ + ∠ هـ ب ء

وباضافة ∠ ا ب حـ الى كل من طرفى هذه المتساوية ينتج ان

∠ ب ا حـ + ∠ ا حـ ب + ∠ ا ب حـ =

∠ ا ب هـ + ∠ هـ ب ء + ∠ ا ب حـ

ولكن ∠ ا ب هـ + ∠ هـ ب ء + ∠ ا ب حـ = ٢ ق

اذن ∠ ب ا حـ + ∠ ا حـ ب + ∠ ا ب حـ = ٢ ق

وهو المطلوب

نتيجة ١ ـــ الزاوية الخارجة فى أى مثلث تساوى مجموع زواياه الداخلة ما عدا المجاورة لها

نتيجة ٢ ـــ اذا ساوت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كانت الزاوية الثالثة فى المثلث الاول مساوية نظيرتها فى المثلث الثانى

نتيجة ٣ ـــ مجموع زوايا أى شكل رباعى يساوى اربع قوائم

(المفروض) ان ا ب حـ ء شكل رباعى

(المطلوب اثباته) ان مجموع زوايا الشكل تساوى أربع قوائم

(البرهان) نرسم ب ء فيقسم الشكل الرباعى الى المثلثين ا ب ء ، ب ء حـ

(شكل ٦١)

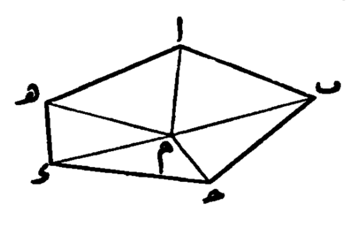
ومجموع زوايا الشكل ا ب حـ ء

= مجموع زوايا △ ا ب ء + مجموع زوايا △ ب ء حـ

= ٤ قوائم وهو المطلوب

« نظرية ٣٧ »

مجموع زوايا المضلع تساوى زوايا قوائم بقدر ضعف عدد اضلاعه ناقصاً أربع قوائم



(شكل ٦٢)

(المفروض) أن ا ب حـ ء هـ مضلع عدد اضلاعه خمسة

(المطلوب اثباته) ان مجموع زوايا المضلع =(٢ × ٥ — ٤) من القوائم

(البرهان) نأخذ نقطة داخل المضلع مثل م ونصل بينها وبين رءوس المضلع بالمستقيمات م ا ، م ب ، م حـ ، م ء ، م هـ فينقسم الشكل الى خمسة مثلثات

ويكون مجموع زوايا خمسة المثلثات الناشئة = ٢ × ٥ قوائم

ولكن مجموع زوايا المثلثات الخمسة هـذه يزيد على مجموع زوايا المضلع بمقدار الزاويا المجتمعة حول نقطة م

وبما أن مجموع الزوايا المجتمعة حول نقطة يساوى ٤ قوائم

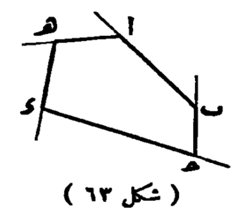
فمجموع زوايا المضلع ذى خمسة الأضلاع ا ب حـ ء هـ = ٢ × ٥ — ٤ من القوائم

(تنبيه) هذا البرهان عام للمضلعات المحدودبة مهما كان عدد اضلاعها فلو رمزنا اذن الى عدد الاضلاع بالرمز ن

تكون مجموع زوايا مضلع عدد اضلاعه ن = ٢ × ن — ٤ من القوائم

« نظرية ٣٨ »

اذا مدت اضلاع أى مضلع بالترتيب من جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة اربع قوائم



(شكل ٦٣)

(المفروض) ان ا ب حـ ى هـ مضلع عدد أضلاعه خمسة مدت أضلاعه على الترتيب فى جهة واحدة

(المطلوب اثباته) ان مجموع الزوايا الخارجة = ٤ قوائم

(البرهان) عدد الزوايا الخارجة يساوى عدد زوايا المضلع الداخلة وكل زاوية داخلة تكمل الزاوية الخارجة التى تجاورها

اذن مجموع زوايا المضلع الداخلة

+ مجموع زواياه الخارجة = ٢ × ٥ قوائم

وتقدم ان مجموع زوايا المضلع الداخلة = ٢ × ٥ — ٤ من القوائم

اذن مجموع الزوايا الخارجة = ٤ قوائم وهو المطلوب
(تنبيه) هذا البرهان عام للمضلعات المحدودبة مهما كان عدد اضلاعها

تمارين (١٢)

(١) المطلوب اثبات نظرية (٣٦) يرسم المستقيم س ا ص يمر بنقطة ا ويوازى ب ح

(٢) ا ب ح مثلث فيه ∠ ا = ∠ ب فاذا مد ب ح على استقامته الى ى فبرهن على ان ∠ ى ح ا = ضعف ∠ ب

(٣) ما مجموع زوايا المضلع ذى خمسة الاضلاع وذى ستة الاضلاع وذى ثمانية الاضلاع

(٤) ا ب ح مثلث فيه ∠ ا = ٥٨° ، ∠ ب = ٤٢° والمطلوب معرفة ما تساويه ∠ ح

(٥) ا ب ح ى شكل رباعى فيه ∠ ا = ٣٧° ، ∠ ب = ١١١° فاذا كانت ∠ ح = ∠ ى فأوجد ما تساويه كل منهما

(٦) اذا مدت قاعدة مثلث من نهايتيها وكانت الزاويتان الخارجتان الحادثتان هما ١٠٥° ، ١١٢° فأوجد ما تساويه كل من زوايا المثلث

(٧) ا ب ح مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا ح) فاذا كانت ∠ ا = ٤٦° فأوجد ما تساويه كل من زاويتى ب ، ح

(٨) المطلوب ايجاد ما تساويه كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الاضلاع

(٩) ما مقـدار ما تساويه كل زاوية داخلة وكل زاوية خارجة فى مخمس منتظم

(١٠) ا ب حـ ء شكل رباعى مد ضلعاه ا ب ، ء حـ على استقامتهما فاذا تلاقيا فى نقطة هـ فبرهن على ان ∠ هـ ب حـ + ∠ هـ حـ ب = ∠ ا + ∠ ء

الباب الخامس

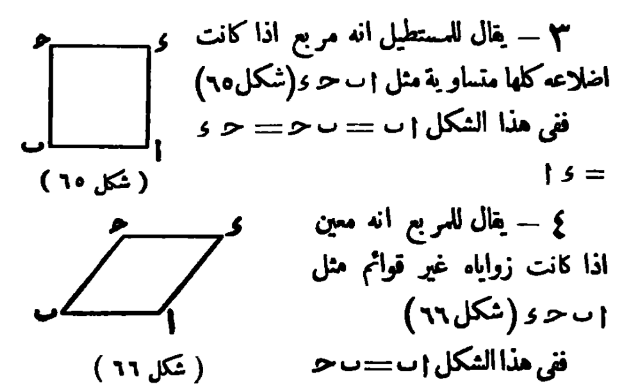
فى الاشكال المتوازية الاضلاع

تعاريف

١ – علمنا فيما مضى أن متوازى الاضلاع شكل رباعى فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

٢ – يقال لمتوازى الاضلاع أنه مستطيل اذا كانت زواياه قوائم مثل ا ب حـ ى (شكل ٦٤)

فى هذا الشكل كل من ∠ا ، ∠ب ، ∠حـ ، ∠ى يساوى قائمة



(شكل ٦٤)

٣ – يقال للمستطيل انه مربع اذا كانت اضلاعه كلها متساوية مثل ا ب حـ ى (شكل ٦٥)

فى هذا الشكل ا ب = ب حـ = حـ ى = ى ا

(شكل ٦٥)

٤ – يقال للمربع انه معين اذا كانت زواياه غير قوائم مثل ا ب حـ ى (شكل ٦٦)

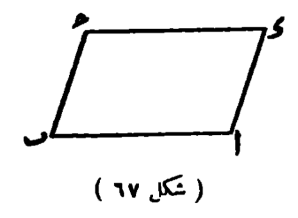
فى هذا الشكل ا ب = ب حـ = حـ ى = ى ا ولكن زواياه ا ، ب ، حـ ، ى ليست بقوائم

(شكل ٦٦)

٥ — يقال لشبه المنحرف أنه متساوى الساقين اذا كان ضلعاه غير المتوازيين متساويين

« نظرية ٣٩ »

فى متوازى الاضلاع كل زاويتين متقابلتين متساويتان



(شكل ٦٧)

(المفروض) أن ا ب ح ى متوازى اضلاع

(المطلوب اثباته) أن ∠ا = ∠ح ، ∠ب = ∠ى

(البرهان) ∠ا + ∠ب = ٢ ق (نظرية ٢٨)

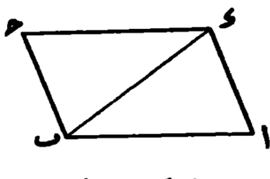
، ∠ح + ∠ب = ٢ ق (نظرية ٢٨)

اذن ∠ا = ∠ح

وبالمثل تثبت أن ∠ب = ∠ى وهو المطلوب

« نظرية ٤٠ »

فى متوازى الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان والقطر يقسمه الى مثلثين متساويين



(شكل ٦٨)

(المفروض) أن ا ب حـ ى متوازى اضلاع رسم قطره ب ى

(المطلوب اثباته) أن ا ب = ى حـ ، ا ى = ب حـ

، △ ا ب ى = △ حـ ى ب

(البرهان) فى المثلثين ا ب ى ، حـ ى ب

بما أن ∠ ا ب ى = ∠ حـ ى ب بالتبادل

، ∠ ا ى ب = ∠ حـ ب ى بالتبادل

، الضلع ى ب مشترك بين المثلثين

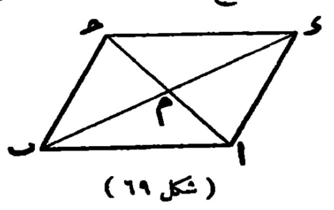
يتساوى المثلثان ا ب ى ، حـ ى ب (نظرية ٥)

ويكون ا ب = ى حـ ، ا ى = ب حـ وهو المطلوب

(نتيجة) المستقيمان المتوازيان على بعد واحد فى جميع امتدادهما

« نظرية ٤١ »

قطرا متوازى الاضلاع ينصف أحدهما الآخر



(شكل ٦٩)

(المفروض) ان ا ب حـ ى متوازى أضلاع رسم قطراه ا حـ ، ب ى وتقاطعا فى نقطة م

(المطلوب اثباته) ان م ا = م حـ ، م ب = م ى

(البرهان) فى المثلثين ا م ب ، حـ م ى

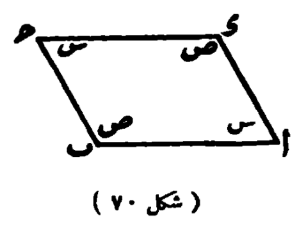
بما أن ⎫ ا ب = حـ ى (نظرية ٤٠)
، ∠ ا ب م = ∠ حـ ى م بالتبادل
، ∠ ب ا م = ∠ ى حـ م ⎭ بالتبادل

يتساوى المثلثان ا م ب ، حـ م ى من عامة الوجوه (نظرية ٥)

ويكون م ا = م حـ ، م ب = م ى وهو المطلوب

« نظرية ٤٢ »

يكون الشكل الرباعى متوازى اضلاع اذا تساوى فيه كل زاويتين متقابلتين



(شكل ٧٠)

(المفروض) ان ا ب حـ ى شكل رباعى وان ∠ ا = ∠ حـ ، ∠ ب = ∠ ى

(المطلوب اثباته) ان ا ب حـ ى متوازى اضلاع

(البرهان) نرمز الى كل من زاويتى ا ، حـ المتساويتين بالرمز س
والزاويتين ب ، ء المتساويتين بالرمز ص

فبما ان مجموع زوايا اى شكل رباعى يساوى قائمتين

تكون ∠ا + ∠ب + ∠حـ + ∠ء = ٤ ق

ويكون ٢ ∠س + ٢ ∠ص = ٤ ق

أى أن ∠س + ∠ص = ٢ ق

اذن ∠ا + ∠ب = ٢ ق

، ∠ا + ∠ء = ٢ ق

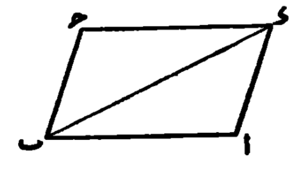
ولكن زاويتى ا ، ب متجانبتان من الداخل وكذا زاويتى ا ، ء

اذن ا ء يوازى ب حـ ، ا ب يوازى ء حـ

ويكون ا ب حـ ء متوازى اضلاع وهو المطلوب

« نظرية ٤٣ »

يكون الشكل الرباعى متوازى اضلاع اذا تساوى وتوازى فيه ضلعان متقابلان



(شكل ٧١)

(المفروض) ان ا ب حـ ء شكل رباعى فيه ا ب يساوى ويوازى ء حـ

(المطلوب اثباته) ان ا ب حـ ء متوازى اضلاع

(البرهان) نرسم القطر ب ء فيحدث المثلثان ب ا ء ، ء حـ ب

فى هذين المثلثين

بما أن { ا ب = حـ ء بالفرض ، ب ء مشترك بين المثلثين ، ∠ ا ب ء = ∠ حـ ء ب بالتبادل }

يتساوى المثلثان ب ا ء ، ء حـ ب من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وتكون ∠ ا ء ب = ∠ حـ ب ء

وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن ا ء يوازى ب حـ

ويكون ا ب حـ ء متوازى اضلاع وهو المطلوب

(نتيجة) اذا رسم عمودان متساويان على مستقيم وكانا فى جهة واحدة منه فان المستقيم الذى يصل طرفيهما يوازى المستقيم الاصلى

« نظرية ٤٤ »

يكون الشكل الرباعى متوازى اضلاع اذا تساوى فيه كل ضلعين متقابلين

(المفروض) ان الشكل ا ب حـ ء (شكل ٧١) رباعى

وأن ا ب = ء حـ ، ا ء = ب حـ

(المطلوب اثباته) أن ا ب حـ ء متوازى اضلاع

(البرهان) نرسم القطر ب ء فيحدث المثلثان ب ا ء ، ء حـ ب

فى هذين المثلثين

بما أن { ا ب = حـ ء بالفرض
، ا ء = حـ ب بالفرض
، ب ء مشترك بين المثلثين }

يتساوى المثلثان ب ا ء ، ء حـ ب من عامة الوجوه (نظرية ٨)

وتكون ∠ ا ء ب = ∠ حـ ب ء

، ∠ ا ب ء = ∠ حـ ء ب

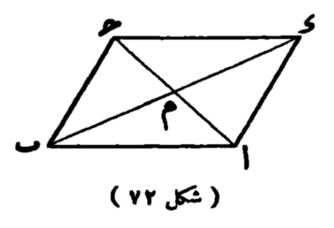
ولكن زاويتى ا ء ب ، حـ ب ء متبادلتان وكذا زاويتى ا ب ء ، حـ ء ب

اذن ا ء يوازى ب حـ ، ا ب يوازى ء حـ

ويكون ا ب حـ ء متوازى اضلاع وهو المطلوب

« نظرية ٤٥ »

يكون الشكل الرباعى متوازى اضلاع اذا نصف أحد قطريه الآخر



(شكل ٧٢)

(المفروض) أن ا ب حـ ء شكل رباعى وان م ا = م حـ
، م ب = م ء

(المطلوب اثباته) أن ا ب حـ ء متوازى اضلاع

(البرهان) فى المثلثين ا م ب ، حـ م ء

بما ان { ام = م حـ بالفرض
، م ب = م ء بالفرض
، ∠ ا م ب = ∠ حـ م ء بالتقابل بالرأس }

يتساوى المثلثان ا م ب ، حـ م ء من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون ا ب = ء حـ ، ∠ م ا ب = ∠ م حـ ء

وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن ا ب يوازى ء حـ كما انه يساويه

اى ان ا ب حـ ء متوازى اضلاع (نظرية ٤٣) وهو المطلوب

تمارين (١٣)

(١) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) فاذا رسم المستقيم ء هـ يوازى القاعدة ويقطع الضلع ا ب فى نقطة ء والضلع ا حـ فى هـ فبرهن على ان ء ب = هـ حـ

(٢) ا ب حـ ء متوازى اضلاع يشترك مع متوازى الاضلاع هـ ب حـ و فى القاعدة ب حـ والمطلوب البرهنة على ان المثلثين ب هـ ا ، حـ و ء متساويان

(٣) برهن على ان منصفى زاويتين متجاورتين فى متوازى اضلاع متعامدان

(٤) برهن على ان منصفى زاويتين متقابلتين فى متوازى اضلاع متوازيان

(٥) ا ب حـ ء متوازى اضلاع فاذا تقاطع قطراه فى نقطة م فبرهن على انها تنصف أى مستقيم يمر بها وينتهى بضلعين متقابلين

(٦) برهن على ان المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث وان نقطة هـ منتصف ا ب ونقطة ى منتصف ا حـ

(المطلوب اثباته)

ان هـ ى يوازى ب حـ

(البرهان) نمد هـ ى الى س

ونقيس البعد ى س = هـ ى ونصل

حـ ، س بالمستقيم حـ س فيحدث

المثلثان ا هـ ى ، حـ س ى

(شكل ٧٣)

فى هذين المثلثين

بما أن | هـ ى = ى س بالعمل
، ا ى = ى حـ بالفرض
، ∠ ا ى هـ = ∠ حـ ى س بالتقابل بالرأس

يتساوى المثلثان ا هـ ى ، حـ س ى من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وينتج من تساويهما ان حـ س = ا هـ ، ∠ ى حـ س = ∠ ى ا هـ

ولكن ا هـ = هـ ب بالفرض والزاويتين ى حـ س ، ى ا هـ متبادلتان

اذن حـ س يساوى ويوازى هـ ب

أى أن ب حـ س هـ متوازى اضلاع (نظرية ٤٣)

ويكون هـ ى يوازى ب حـ وهو المطلوب

(٧) ا ب حـ ى شبه منحرف متساوى الساقين (ا ى = ب حـ)

والمطلوب البرهنة على ان ∠ حـ = ∠ ى

(٨) ا ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين (ا ء = ب حـ)
فاذا نصف الضلع ا ب فى نقطة هـ والضلع حـ ء فى نقطة و
فبرهن على ان هـ و عمودى على ا ب

(٩) برهن على ان المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين متوازيين
فى متوازى الاضلاع يوازى ضلعيه الآخرين

(١٠) ا ب حـ ء متوازى اضلاع فاذا نصف الضلع ا ب فى نقطة س
والضلع حـ ء فى نقطة ص فبرهن على ان ب س ء ص متوازى
اضلاع

(١١) برهن على ان قطرى المعين متعامدان

(١٢) برهن على ان المستقيمات المتوازية المحصورة بين مستقيمين
متوازيين كلها متساوية

(١٣) اذا تلاقى مستقيمان متساويان بمستقيم ثالث وكانا متوازيين وفى
جهة واحدة منه فان المستقيم الذى يصل طرفيهما يوازى
المستقيم الثالث

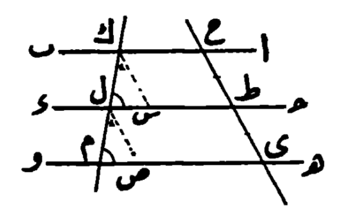
(١٤) برهن على أن المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين فى مثلث
يساوى نصف الضلع الثالث

[فى متوازى الاضلاع ب حـ س هـ (شكل ٧٣) الضلع
س هـ = حـ ب ولكن هـ ء يساوى نصف هـ س اذن هـ ء
= نصف ب حـ]

(١٥) المطلوب البرهنة على ان المستقيمات التى تصل بين منتصفات
اضلاع مثلث تقسمه الى أربعة مثلثات متساوية

« نظرية ٤٦ »

اذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية وكانت اجزاؤه المحصورة بينها متساوية فان الاجزاء المحصورة لأى مستقيم آخر يقطع هذه المتوازيات تكون متساوية كذلك



(شكل ٧٤)

(المفروض) أن ا ب ، حـ ى ، ﻫ و مستقيمات متوازية وأن ح ط ى يقطعها بحيث أن الجزء ح ط = ط ى وأن ك ل م يقطع هذه المتوازيات

(المطلوب اثباته) ك ل = ل م

(البرهان) نرسم من نقطة ك المستقيم ك س يوازى ح ى ومن ل المستقيم ل ص يوازى ح ى ايضا فيحدث المثلثان ك ل س ، ل م ص

ومن حيث أن كلا من س ك ح ط ، ص ل ط ى متوازى اضلاع

فيكون { ك س = ح ط ، ل ص = ط ى }

ولكن ح ط = ط ى بالفرض

اذن ك س = ل ص

فى المثلثين ك ل س ، ل م ص

بما أن ⎫ ك س = ل ص بالاثبات
⎬ و ∠ س ك ل = ∠ ص ل م بالتناظر
⎭ و ∠ س ل ك = ∠ ص م ل بالتناظر

يتساوى المثلثان ك ل س و ل م ص (نظرية ٢٠)

و ينتج من تساويهما أن ك ل = ل م وهو المطلوب

تمارين (١٤)

(١) برهن على ان المستقيم الذى ينصف أحد أضلاع مثلث و يوازى قاعدته ينصف ضلعه الثانى

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث وان نقطة ء منتصف ا ب وان ء هـ يوازى ب حـ و يقطع ا حـ فى هـ

(المطلوب اثباته) أن ا هـ = هـ حـ

(البرهان) نرسم من نقطة ا المستقيم س ا ص يوازى ب حـ

فتكون المستقيمات س ص و ء هـ و ب حـ كلها متوازية

ولكن نعلم فرضاً ان ا ء = ء ب

اذن ا هـ = هـ حـ (نظرية ٤٦) وهو المطلوب

(شكل ٧٥)

(٢) برهن على ان المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين فى مثلث ينصف أى مستقيم يصل ضلعه الثالث والرأس المقابل له

(٣) اذا وصلت منتصفات الاضلاع المتجاورة فى شكل رباعى فبرهن على ان الشكل الناتج متوازى اضلاع

(٤) اذا وصل منتصفا كل ضلعين متقابلين فى شكل رباعى

فبرهن على ان المستقيمين الواصلين ينصف أحدهما الآخر

(٥) ا ب حـ ء متوازى اضلاع ونقطة س منتصف الضلع ا ب ونقطة ص منتصف الضلع المقابل ء حـ والمطلوب البرهنة على ان ء س ، ب ص يقسمان القطر ا حـ الى ثلاثة أقسام متساوية

(٦) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الذى يصل منتصفى الضلعين غير المتوازيين فى شبه المنحرف يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين ويوازيهما

(٧) اذا انزل عمودان من نهايتى قطر متوازى اضلاع على مستقيم خارج عنه فبرهن على أن مجموع هذين العمودين يساوى ضعف العمود النازل من منتصف هذا القطر على المستقيم المفروض

(٨) اذا أنزلت أعمدة من رءوس متوازى أضلاع على مستقيم خارج عنه فبرهن على ان مجموع العمودين النازلين من رأسين متقابلين يساوى مجموع العمودين الآخرين

(٩) اذا فرضت نقطة على قاعدة مثلث متساوى الساقين وانزل منها عمودان على ساقيه فبرهن على أن مجموع هذين العمودين يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له

(١٠) اذا فرضت نقطة على امتداد قاعدة مثلث متساوى الساقين وانزل منها عمودان على ساقيه فبرهن على ان فرق هذين العمودين يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له

(١١) اذا فرضت نقطة داخل مثلث متساوى الاضلاع وأنزل منها أعمدة على اضلاعه الثلاثة فبرهن على ان مجموع هذه الاعمدة يساوى العمود النازل من احد رءوس المثلث على الضلع المقابل له

الباب السادس

فى الدعاوى العملية

الدعاوى العملية هى مجرد عمليات هندسية

وتستلزم هذه العمليات استعمال المسطرة والفرجار (البرجل) وسنردف كل عملية ببرهان نظرى تطبيقا على ما تقدم من الدوعاى النظرية

(تعريف) الدائرة هى شكل مستو يحيط به خط جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخلة تسمى مركزاً

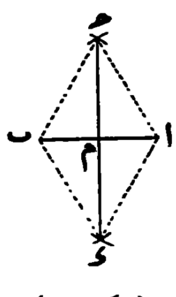
(شكل ٧٦)

ففى شكل (٧٦) النقطة م ابعادها عن جميع نقط الخط الذى حولها متساوية وتسمى م بمركز الدائرة ويسمى م ه بنصف قطر الدائرة والخط المحدد للدائرة بمحيطها

(ملاحظة) يمكن بواسطة الفرجار رسم الدائرة وذلك بأن نركز بأحدى شعبتيه فى نقطة ثابتة مثل م ثم نحرك شعبته الثانية حولها

« عملية ١ »

المطلوب تنصيف مستقيم محدود



(شكل ٧٧)

(المفروض) ان ا ب هو المستقيم

(المطلوب عمله) تنصيف المستقيم ا ب

(العمل) نركز فى ا و ببعد مناسب نرسم قوساً فوق ا ب وآخر أسفله ثم نركز فى ب و بنفس البعد الاول نرسم قوسين تقطعان الاولين فى حـ ٬ ى ثم نصل حـ ى فيقطع ا ب فى نقطة م فتكون هى منتصف ا ب

(البرهان) نصل ا حـ ٬ ب حـ ٬ ا ى ٬ ب ى

ففى المثلثين ا حـ ى ٬ ب حـ ى

بما أن { ا حـ = ب حـ — بالعمل
٬ ا ى = ب ى — بالعمل
٬ حـ ى مشترك بين المثلثين }

يتساوى المثلثان ا حـ ى ٬ ب حـ ى (نظرية ٨)

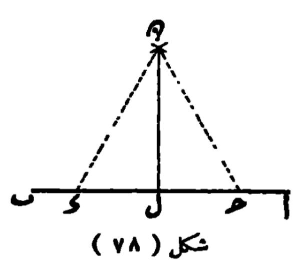
وينتج ان ∠ ا حـ ء = ∠ ب حـ ء
أى ان ∠ ا حـ م = ∠ ب حـ م
وكذلك فى المثلثين ا حـ م ، ب حـ م

بما ان { ا حـ = ب حـ بالعمل
، حـ م مشترك بين المثلثين
، ∠ ا حـ م = ∠ ب حـ م بالاثبات }

يتساوى المثلثان ا حـ م ، ب حـ م (نظرية ٤)
وينتج ان ا م = م ب
اى ان م منتصف ا ب وهو المطلوب

« عملية ٢ »

المطلوب اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه



شكل (٧٨)

(المفروض) ان ا ب هو المستقيم المعلوم وان ل النقطة المفروضة عليه
(المطلوب عمله) اقامة عمود من ل على ا ب
(العمل) نركز فى ل وبنصف قطر مناسب نعين النقطتين حـ ، ء على ا ب

ثم نركز فى كل من حـ ، ء وبنصف قطر مناسب نرسم قوسين تتقاطعان فى ۿ ثم نصل ۿ ل فيكون عموداً على ا ب

(البرهان) نصل ۿ حـ ، ۿ ء

ففى المثلثين ۿ ل حـ ، ۿ ل ء

بما ان
حـ ل = ء ل بالعمل
، ۿ ل مشترك بين المثلثين
، ۿ حـ = ۿ ء بالعمل

يتساوى المثلثان ۿ ل حـ ، ۿ ل ء (نظرية ٨)

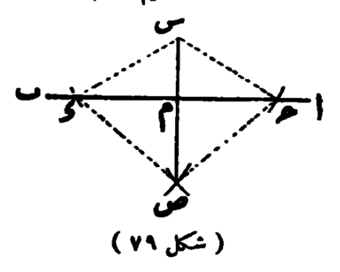
وينتج ان ∠ ۿ ل حـ = ∠ ۿ ل ء

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

اى ان ۿ ل عمودى على ا ب وهو المطلوب

« عملية ٣ »

المطلوب اسقاط عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة خارجة



(شكل ٧٩)

(المفروض) أن ا ب مستقيم وأن نقطة س خارجة عنه

(المطلوب عمله) اسقاط عمود من س على ا ب

(العمل) نركز فى س و بنصف قطر مناسب نعين النقطتين حـ ، ء على ا ب ثم نركز فى كل من حـ ، ء و بنصف قطر مناسب نرسم قوسين أسفل المستقيم ا ب تتقاطعان فى نقطة ص

ثم نصل س ص قاطعاً المستقيم ا ب فى م فيكون س م عموداً على ا ب

(البرهان) نصل حـ س ، ء س ، حـ ص ، ء ص

ففى المثلثين حـ س ص ، ء س ص

بما أن { حـ س = ء س بالعمل
، حـ ص = ء ص بالعمل
، س ص مشترك بين المثلثين }

يتساوى المثلثان حـ س ص ، ء س ص (نظرية ٨)

وينتج أن ∠ حـ س ص = ∠ ء س ص

أى ان ∠ حـ س م = ∠ ء س م

وفى المثلثين حـ س م ، ء س م

بما أن { حـ س = ء س بالعمل
، س م مشترك بين المثلثين
، ∠ حـ س م = ∠ ء س م بالاثبات }

يتساوى المثلثان حـ س م ، ء س م (نظرية ٤)

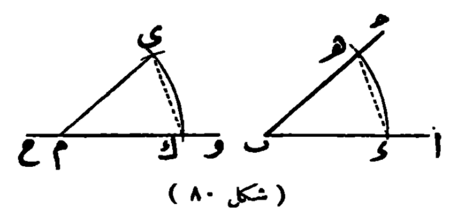
وينتج أن ∠ س م حـ = ∠ س م ء

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

أى ان س م عمودى على ا ب وهو المطلوب

« عملية ٤ »

المطلوب رسم زاوية تساوى زاوية معلومة



(شكل ٨٠)

(المفروض) ان ا ب حـ الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) رسم زاوية تساوى الزاوية المعلومة

(العمل) نفرض مستقيما مثل و ح ونعين عليه نقطة مثل م ثم نركز فى نقطة ب وبنصف قطر مناسب نرسم قوساً تقطع ب ا فى ى ، ب حـ فى هـ

ونركز فى م وبالبعد عينه نرسم قوساً تقطع و ح فى ك ونركز فى ك وبنصف قطر يساوى ى هـ نرسم قوساً تقطع الاولى فى ى ثم نصل م ى فتكون ∠ ى م ك هى الزاوية المطلوبة

(البرهان) فى المثلثين ى م ك ، هـ ب ى

من حيث ان	م ى = ب هـ	بالعمل
	، م ك = ب ى	بالعمل
	، ى ك = هـ ى	بالعمل

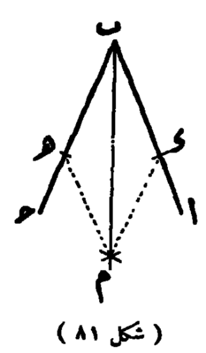
يتساوى المثلثان ى م ك ، هـ ب ى (نظرية ٨)

وينتج ان ∠ ى م ك = ∠ هـ ب ى

اى ان ∠ ى م ك = ∠ ا ب حـ وهو المطلوب

« عملية ٥ »

المطلوب تنصيف زاوية معلومة



(شكل ٨١)

(المفروض) ان ا ب حـ الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) تنصيف هذه الزاوية

(العمل) نركز فى ب وبنصف قطر مناسب نرسم قوساً تقطع ب ا فى ء ، ب حـ فى هـ

ثم نركز فى كل من ء ، هـ ونصف قطر مناسب نرسم قوسين تتقاطعان فى م ونصل ب م فيكون هو منصف الزاوية ا ب حـ

(البرهان) نصل ء م ، هـ م

ففى المثلثين ء م ب ، هـ م ب

بما أن { ء م = هـ م بالعمل ، ء ب = هـ ب بالعمل ، م ب مشترك بين المثلثين }

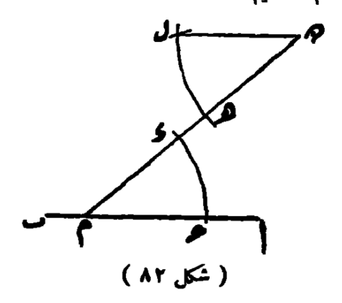
يتساوى المثلثان ء م ب ، ﻫ م ب (نظرية ٨)

وينتج أن ∠ ء ب م = ∠ ﻫ ب م

أى ان ب م ينصف ∠ ا ب ح وهو المطلوب

« عملية ٦ »

المطلوب رسم مستقيم يوازى آخر معلوما من نقطة مفروضة خارجه



(شكل ٨٢)

(المفروض) ان ا ب المستقيم المعلوم وان ﻫ النقطة المفروضة خارجه

(المطلوب عمله) رسم مستقيم من نقطة ﻫ يوازى ا ب

(العمل) نفرض نقطة مثل م على ا ب ونصل ﻫ م ثم نرسم من نقطة ﻫ المستقيم ﻫ ل كى يصنع مع ﻫ م زاوية ل ﻫ م تساوى زاوية ﻫ م ا كما تقدم بعملية (٤) فيكون ﻫ ل هو المستقيم الذى يوازى ا ب

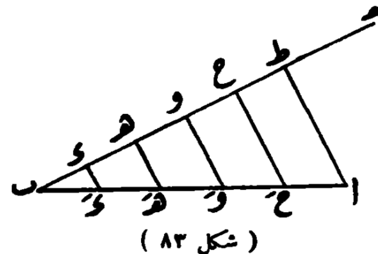
(البرهان) ∠ ل ﻫ م = ﻫ م ا بالعمل

وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن ﻫ ل يوازى ا ب (نظرية ٢٧) وهو المطلوب

« عملية ٧ »

المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى أقسام متساوية



(شكل ٨٣)

(المفروض) أن ا ب المستقيم المعلوم

(المطلوب عمله) تقسيم ا ب الى خمسة أقسام متساوية

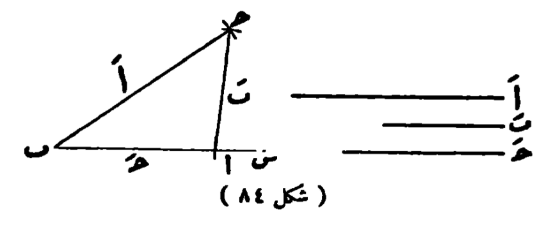
(العمل) نرسم من ب مستقيما مثل ب ح غير محدود يصنع مع ب ا زاوية ا ب ح ثم نأخذ على ب ح خمسة أبعاد متساوية ولتكن ب ى ، ى ه ، ه و ، و ع ، ع ط ونصل ط ا ونرسم من كل من ى ، ه ، و ، ع مستقيمات توازى ط ا وتقابل ب ا فى ى َ ، ه َ ، و َ ، ع َ فتكون هذه النقط هى نقط التقسيم ويكون ا ع َ = ع َ و َ = و َ ه َ = ه َ ى َ = ى َ ب

(البرهان) بما أن المستقيمات ى ى َ ، ه ه َ ، و و َ ، ع ع َ ، ط ا متوازية بالعمل والمستقيم ب ح يقطعها واجزاؤه ب ى ، ى ه ، ه و ، و ع ، ع ط متساوية فتكون اجزاء المستقيم ب ا وهى ب ى َ ، ى َ ه َ ، ه َ و َ ، و َ ع َ ، ع َ ا متساوية كذلك (نظرية ٤٦)

وبذلك ينقسم المستقيم ا ب الى خمسة أقسام متساوية وهو المطلوب

« عملية ٨ »

المطلوب رسم مثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة



(شكل ٨٤)

(المفروض) أن اَ ، بَ ، حـَ أطوال الاضلاع الثلاثة للمثلث ا ب حـ

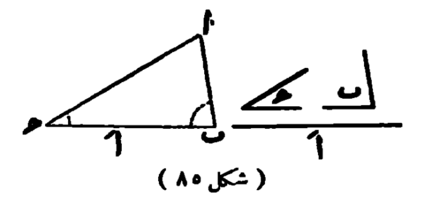
(المطلوب عمله) رسم المثلث ا ب حـ

(العمل) نرسم المستقيم ب س ونأخذ عليه البعد ب ا = حـَ ثم نركز فى ب وبنصف قطر = اَ نرسم قوسا ونركز فى ا وبنصف قطر = بَ نرسم قوسا اخرى تقطع الاولى فى حـ ثم نصل حـ ا ، حـ ب فيكون ا ب حـ المثلث المطلوب

(البرهان) بما ان الاضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب تساوى بالعمل اَ ، بَ ، حـَ فيكون ا ب حـ المثلث المطلوب رسمه

« عملية ٩ »

المطلوب رسم مثلث اذا علم منه ضلع والزاويتان المجاورتان له



(شكل ٨٥)

(المفروض) ان ا َ الضلع المعلوم من المثلث ا ب ح وأن ب ، ح الزاويتان المجاورتان للضلع ا َ

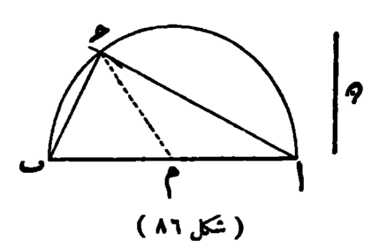
(المطلوب عمله) رسم المثلث ا ب ح

(العمل) نرسم المستقيم ب ح = ا َ ونرسم من نقطة ب مستقيما يصنع مع ح ب زاوية تساوى ∠ ب وكذلك نرسم من نقطة ح مستقيما يصنع مع ب ح زاوية تساوى ∠ ح ثم نمد هذين المستقيمين الى ان يتلاقيا فى نقطة ا فيكون ا ب ح المثلث المطلوب

(البرهان) بما ان الضلع ب ح = ا َ بالعمل ، ∠ ح ب ا = ∠ ب ، ∠ ب ح ا = ∠ ح بالعمل أيضاً فيكون ا ب ح المثلث المطلوب رسمه

« عملية ١٠ »

المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر واحد الضلعين الآخرين



(شكل ٨٦)

(المفروض) ان ا ب الوتر وان ه أحد الضلعين الآخرين

(المطلوب عمله) رسم المثلث القائم الزاوية

(العمل) ننصف ا ب فى م ونركز فيها و بنصف قطر يساوى م ب نرسم نصف محيط دائرة ثم نركز فى ب و بنصف قطر يساوى ه نرسم قوساً تقطع نصف المحيط فى حـ ثم نصل حـ ب ، حـ ا فيكون ا ب حـ المثلث المطلوب

(البرهان) نصل م حـ

بما ان م ب = م حـ = م ا

تكون ∠ م حـ ب = ∠ م ب حـ

، ∠ م حـ ا = ∠ م ا حـ

وتكون ∠ ا حـ م + ∠ م حـ ب = ∠ م ا حـ + ∠ م ب حـ

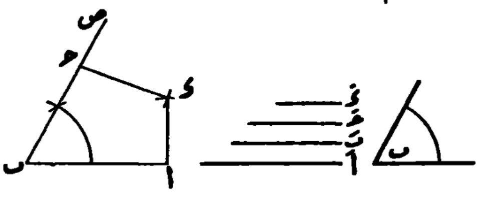
أى ان ∠ ا حـ ب = ∠ ب ا حـ + ∠ ا ب حـ

و بما أن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين

فتكون ∠ ا حـ ب = قائمة و بذلك يكون ا ب حـ المثلث المطلوب رسمه

« عملية ١١ »

المطلوب رسم الشكل الرباعى المعلوم منه زاوية واضلاعه الاربعة



(شكل ٨٧)

(المفروض) أن ا َ ، ب َ ، حـ َ ، ى َ اطوال اضلاع الشكل الرباعى وان ب هى الزاوية المعلومة المحصورة بين الضلعين ا َ ، ب َ

(المطلوب عمله) رسم الشكل الرباعى ا ب حـ ى

(العمل) نرسم مستقيما مثل ا ب = الطول ا َ ثم نرسم ∠ ا ب ص = ∠ ب المعلومة ونأخذ على ب ص البعد ب حـ = الطول ب َ ثم نركز فى حـ وبنصف قطر = حـ َ نرسم قوسا ونركز فى ا وبنصف قطر = ى َ نرسم قوسا أخرى تقطع الاولى فى ى ثم نصل ى حـ ، ى ا فيكون ا ب حـ ى الشكل الرباعى المطلوب

(البرهان) الشكل ا ب حـ ى الناتج فيه ا ب = ا َ ، ب حـ = ب َ ، حـ ى = حـ َ ، ى ا = ى َ ، ∠ ا ب حـ = ∠ ب المعلومة

اذن ا ب حـ ى هو الشكل الرباعى المطلوب رسمه

تمارين (١٥)

(١) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

(٢) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه زاويتان والضلع المقابل لاحداهما

(٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما

(٤) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وزاوية حادة

(٥) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر ومجموع الضلعين الآخرين

(٦) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر والفرق بين الضلعين الآخرين

(٧) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه المحيط وزاويتا القاعدة

(٨) المطلوب رسم المثلث المتساوى الساقين اذا علمت زاوية رأسه وطول العمود النازل من الرأس على القاعدة

(٩) المطلوب رسم المثلث ا ب حـ اذا علمت الزاويتان ب ، حـ وطول العمود النازل من ا على ب حـ

(١٠) المطلوب رسم المثلث المتساوى الساقين اذا علمت زاوية رأسه وطول قاعدته

(١١) المطلوب رسم المثلث المتساوى الساقين اذا علمت قاعدته ومجموع احدى ساقيه وارتفاعه

(١٢) المطلوب رسم متوازى الاضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما

(١٣) المطلوب رسم المربع المعلوم ضلعه

(١٤) المطلوب رسم متوازى الاضلاع اذا علم طول قطرية والزاوية التى بينهما

(١٥) المطلوب رسم المعين اذا علم طول قطريه

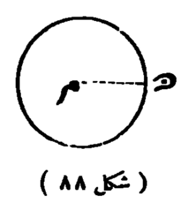
الباب السابع

فى المحال الهندسية

(تعريف) المحل الهندسى لنقطة هو الطريق الذى تتحرك فيه هذه النقطة وهى مقيدة بشرط أو جملة شروط

ولادراك معنى المحل الهندسى نذكر بعض أمثلة بسيطة وفى كل منها سنتخذ البرهان النظرى دليلا حتى نتحقق ان كل نقطة من نقط المحل الهندسى تفى بالشرط المذكور

مثال ١ — المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير وهى حافظة لبعد معين بينها و بين نقطة اخرى ثابتة



(شكل ٨٨)

(المفروض) ان م نقطة ثابتة وان البعد المعين سنتيمتران

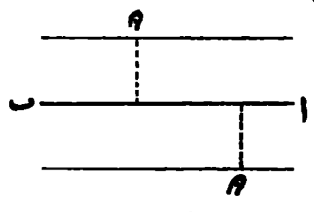
(المطلوب عمله) ايجاد المحل الهندسى لنقطة تسير بحيث يكون بعدها عن م يساوى سنتيمترين على الدوام

(العمل) نركز فى م و بنصف قطر يساوى سنتيمترين نرسم محيط دائرة فيكون هذا المحيط هو المحل الهندسى المطلوب

(البرهان) نأخذ أى نقطة من نقط المحل الهندسى مثل ه ونصلها بنقطة م فمن حيث أن م مركز الدائرة المرسومة ونقطة ه احدى نقط المحيط يكون م ه مساوياً سنتيمترين

اذن محيط الدائرة هو المحل الهندسى المطلوب

مثال ٢ — المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير على بعد ثابت من مستقيم معلوم



(شكل ٨٩)

(المفروض) ان ا ب مستقيم معلوم وان البعد المعين سنتيمتر واحد

(المطلوب عمله) ايجاد المحل الهندسى لنقطة تسير بحيث يكون بعدها عن ا ب يساوى سنتيمتراً على الدوام

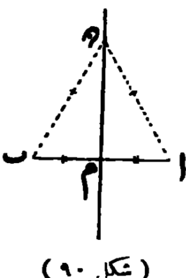
(العمل) نرسم مستقيما أعلى ا ب وعلى بعد سنتيمتر منه وكذلك نرسم مستقيما اسفل ا ب وعلى بعد سنتيمتر منه فيكون المستقيم الا على المحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر أعلى المستقيم ا ب ويكون المستقيم الاسفل المحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر اسفل ا ب

(البرهان) نأخذ اى نقطة من نقط الخط الاعلى مثل ه وننزل منها عموداً على ا ب فمن حيث أن المستقيمين المتوازيين على بعد واحد فى جميع امتدادهما يكون طول العمود سنتيمتراً واحداً

ويكون المستقيم الموازى هو المحل الهندسى المطلوب

وبالمثل نبرهن على ان المستقيم الاسفل هو كذلك المحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر اسفل المستقيم ا ب

مثال ٣ — المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن نقطتين ثابتتين متساويان



(شكل ٩٠)

(المفروض) ان ا ، ب نقطتان ثابتتان

(المطلوب عمله) ايجاد المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن ا ، ب دائماً متساويان

(العمل) ننصف المستقيم ا ب فى نقطة م ثم نقيم من م عموداً على ا ب فيكون هذا العمود هو المحل الهندسى المطلوب

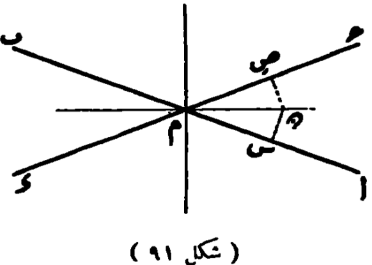
(البرهان) نأخذ أى نقطة على العمود (سواء كانت أعلى ا ب أو اسفله) مثل ه ونصل ه ا ، ه ب

فبما ان م ا = م ب يكون المائلان ه ا ، ه ب متساويى البعد عن موقع العمود ه م

ويكون ه ا = ه ب (نظرية ١٨)

اذن ه م هو المحل الهندسى المطلوب

مثال ٤ — المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن مستقيمين متقاطعين متساويان



(شكل ٩١)

(المفروض) ان المستقيمين ا ب ، حـ ء يتقاطعان فى نقطة م

(المطلوب عمله) ايجـاد المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن ا ب ، حـ ء متساويان

(العمل) نصف الزاويتين ا م حـ ، ب م ء وكذلك نصف الزاويتين ب م حـ ، ء م ا فيكون كل من المنصفين هو المحل الهندسى المطلوب

(البرهان) نأخذ أى نقطة على أحد المنصفين ولتكن نقطة هـ داخل الزاوية ا م حـ وننزل العمودين هـ س ، هـ ص على ا م ، حـ م

ففى المثلثين هـ س م ، هـ ص م

بما ان { ∠ هـ س م = هـ ص م بالقيام
والوتر هـ م مشترك بين المثلثين
، ∠ س م هـ = ∠ ص م هـ بالعمل }

يتساوى المثلثان هـ س م ، هـ ص م (نظرية ٢٠)

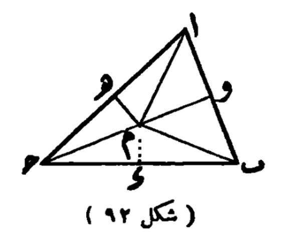
وينتج ان هـ س = هـ ص

اذن كل من المستقيمين اللذين ينصفان الزوايا المحصورة بين المستقيمين المعلومين هو المحل الهندسى المطلوب

تقاطع المحال الهندسية

نستخدم تقاطع المحال الهندسية فى حل كثير من العمليات الهندسية ويمكن تعيين موضع نقطة تتقيد بشرطين بايجاد نقطة تقاطع المحلين الهندسيين المرتبطين بالشرطين المذكورين واليك المثال

مثال ١ — المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن رءوس مثلث متساوية



(شكل ٩٢)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث

(المطلوب عمله) ايجاد نقطة تكون ابعادها عن ا ، ب ، حـ متساوية

(العمل) ننصف المستقيمين ا ب ، ا حـ فى و ، هـ ثم نقيم من و عموداً على ا ب ومن هـ عموداً على ا حـ فيتلاقى العمودان فى نقطة م فتكون هذه هى النقطة المطلوبة بمعنى ان م ا = م ب = م حـ

(البرهان) من حيث ان و م هو العمود المقام على منتصف ا ب

يكون م ا = م ب

ومن حيث أن ﻫ م هو العمود المقام على منتصف ا ح

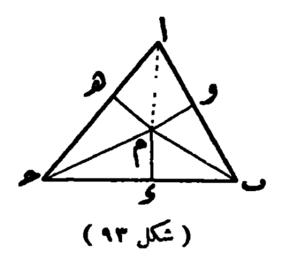
يكون م ا = م ح

اى ان م ا = م ب = م ح

وعلى ذلك تكون نقطة م هى النقطة المطلوب تعيينها

(ملاحظة) من حيث ان م ب = م ح تكون نقطة م احدى نقط العمود المقام على منتصف ب ح وبذلك يتعين ان الاعمدة المقامة من منتصفات اضلاع مثلث تتلاقى فى نقطة واحدة

مثال ٢ — المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن اضلاع مثلث متساوية



(شكل ٩٣)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث

(المطلوب عمله) ايجاد نقطة تكون ابعادها عن الاضلع ا ب ، ب ح ، ح ا متساوية

(العمل) تنصف زاويتى ب ، ح بمستقيمين يتلاقيان فى نقطة م فتكون هذه هى النقطة المطلوبة أى ان العمود م ى = م ﻫ = م و

(البرهان) من حيث ان ب م ينصف زاوية ب

يكون م ء = م هـ

ومن حيث ان حـ م ينصف زاوية حـ

يكون م ء = م و

اى ان م ء = م هـ = م و

وعلى ذلك تكون نقطة م هى النقطة المطلوب تعينها

(ملاحظة) من حيث ان العمود م هـ = م و تكون نقطة م احدى نقط المستقيم الذى ينصف زاوية ا و بذلك يتعين ان منصفات زوايا المثلث الثلاث تتلاقى فى نقطة واحدة

تمارين (١٦)

(١) المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

(٢) المطلوب تعيين المحل الهندسى لرأس الزاوية القائمة من مثلث قائم الزاويه وتره ثابت

(٣) المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير و بعدها عن محيط دائرة معلومة ثابت

(٤) المطلوب تعيين المحل الهندسى لرأس مثلث متساوى الساقين قاعدته ثابتة

(٥) المطلوب تعيين نقطة على بعد معلوم من نقطة اخرى مفروضة وعلى بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

(٦) المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن ثلاث نقط مفروضة متساوية

(٧) عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث يكون بعداها عن نقطتين مفروضتين خارج المستقيم متساويين

(٨) عين نقطة على مستقيم بحيث يكون بعداها عن مستقيمين آخرين متقاطعين متساويين

(٩) المطلوب تعيين نقطة على بعد معين من مستقيم معلوم ويكون بعداها عن نقطتين معلومتين متساويين

(١٠) المطلوب تعيين نقطة يكون بعداها عن نقطتين معلومتين متساويين وكذا يكون بعداها عن مستقيمين متوازيين متساويين

(١١) المطلوب تعيين نقطة يكون بعداها عن نقطتين معلومتين متساويين وأيضاً يكون بعداها عن مستقيمين متقاطعين متساويين

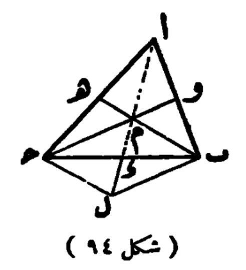
(١٢) المطلوب رسم المثلث معلوم منه القاعدة والارتفاع بحيث يكون رأسه على مستقيم معلوم

(١٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه قاعدته وارتفاعه وطول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة

(١٤) المطلوب تعيين المحل الهندسي لنقطة يكون مجموع بعديها عن ضلعي زاوية ثابتاً

تمارين عامة

(١) المستقيمات المتوسطة للمثلث تتلاقى فى نقطة واحدة وهذه النقطة تقسم كلا منها الى الثلث من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس



(شكل ٩٤)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث

(المطلوب اثباته) ان المستقيمات المتوسطة تتلاقى فى نقطة واحدة

(البرهان) اولا — ننصف الضلعين ا ب ، ا حـ فى و ، هـ ونفرض ان المستقيمين المتوسطين يتلاقيان فى نقطة م ثم نصل ا م ونمده الى ان يقابل ب حـ فى ى فتكون نقطة ى منتصف ب حـ

وذلك لاننا اذا رسمنا من نقطة ب مستقيما يوازى و حـ ويقابل امتداد ا ى فى ل

يكون فى △ ا ب ل الضلع و م ينصف ا ب ويوازى ب ل

اذن نقطة م تنصف ا ل

واذا وصلنا ل حـ يكون فى المثلث ا ل حـ المستقيم م هـ يقطع ضلعيه وينصفهما

اذن م هـ يوازى ل حـ
اى أن ب م يوازى ل حـ
ويكون الشكل ب ل حـ م متوازى اضلاع
ومن حيث ان قطرى متوازى الاضلاع ينصف احدهما الاخر
فتكون نقطة ى منتصف ب حـ
وبذلك يثبت ان المستقيمات المتوسطة الثلاثة تتلاقى فى م
ثانيا — لاثبات ان نقطة م تقسم كلا من المستقيمات المتوسطة الى الثلث من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس نقول

بما ان { م ا = م ل ، و م ى = نصف م ل }
اذن م ى = نصف م ا
اى ان م ى ثلث ا ى و م ا ثلثا ا ى
وبالمثل نبرهن على ان م هـ ثلث ب هـ و م ب ثلثا ب هـ
و م و ثلث حـ و و م حـ ثلثا حـ و

(٢) ا ب حـ و ى حـ ب مثلثان بينهما قاعدة مشتركة ب حـ وفى جهة واحدة منها فاذا كان ا ب = ى حـ و ا حـ = ى ب فبرهن على ان ا ى يوازى ب حـ

(٣) اذا مدت أحدى ساقى مثلث متساوى الساقين من جهة الرأس ونصفت الزاوية الخارجة فبرهن على ان المنصف يوازى القاعدة

(٤) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) نصفت زاويتاه ب و حـ فاذا قطع منصف ∠ ب الضلع ا حـ فى ى وقطع منصف ∠ حـ الضلع ا ب فى هـ فبرهن على ان ى هـ يوازى ب حـ وأن حـ ى = ى هـ = هـ ب

(٥) ا ب حـ مثلث متساوى الاضلاع فاذا مد ضلعه ب حـ الى ى وكان حـ ى = حـ ب فبرهن على ان ى ا عمودى على ا ب

(٦) اذا فرضت نقطة ﻫ داخل مثلث ا ب حـ وكان ا ﻫ = ا ب فبرهن على أن ا حـ > ا ب

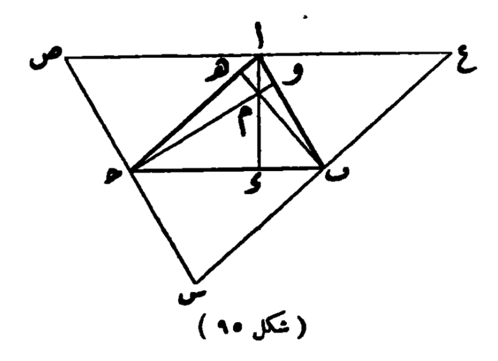
(٧) برهن فى المثلث القائم الزاوية على أن المستقيم الذى يصل رأس القائمة ومنتصف الوتر يساوى نصف هذا الوتر

(٨) برهن فى المثلث الذى مقدار زواياه ٩٠° ، ٦٠° ، ٣٠° على أن اصغر اضلاعه يساوى نصف اكبرها

(٩) ا ب حـ مثلث مد ضلعه ا ب الى س وضلعه ا حـ الى ص فاذا كان ب س = حـ ص = ب حـ وتقاطع ب ص ، حـ س فى ع فبرهن على أن ∠ ب ع س + ½ ∠ ب ا حـ = ٩٠°

(١٠) ا ب حـ مثلث مد ضلعه ب حـ الى ى فاذا قطع منصف ∠ ا الضلع ب حـ فى ﻫ فبرهن على أن ضعف ∠ ا ﻫ ى = ∠ ا ب ى + ∠ ا حـ ى

(١١) برهن على أن الاعمدة النازلة من رءوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها تتلاقى فى نقطة واحدة



(شكل ٩٥)

(المفروض) ان ا ب حـ مثلث

(المطلوب اثباته) ان الاعمدة النازلة من ا ، ب ، حـ على الاضلاع المقابلة لها تتلاقى فى نقطة واحدة

(البرهان) نرسم من ا مستقيما يوازى ب حـ ونرسم من ب مستقيما يوازى ا حـ ونرسم من حـ مستقيما يوازى ا ب وتفرض ان هـذه المستقيمات تتقاطع وتكون المثلث س ص ع

كل من الشكلين ا ع ب حـ ، ا ب حـ ص متوازى اضلاع لان الاضلاع المتقابلة فى كل منهما متوازية بالعمل

اذن ع ا = ب حـ = ا ع

اى أن نقطة ا منتصف ع ص

و بالمثل تثبت أن نقطة ب منصف س ع ونقطة حـ منتصف س ص

فلو أنزلنا أعمدة من ا ، ب ، حـ على الاضلاع المقابلة فى △ ا ب حـ تكون هذه الاعمدة بمثابة أعمدة مقامة من منتصفات الإضلاع فى △ س ص ع

وسبق ان برهنا أن هذه الاعمدة تتلاقى فى نقطة واحدة و بذلك يثبت المطلوب

(١٢) برهن على أن مجموع المستقيمات المتوسطة فى مثلث أكبر من ثلاثة أرباع محيطه

(١٣) ا ب حـ مثلث نصف ضلعه ب حـ فى م ورسم من ب ، حـ عمودان على مستقيم يمر بنقطة ا فاذا فرض أن موقعى العمودين هما ل ، ﻫ فبرهن على أن م ل = م ﻫ

(١٤) ا ب حـ مثلث مد ضلعاه ا ب ، ا حـ الى س ، ص فاذا نصفت

الزاويتان الخارجتان س ب حـ ، ص حـ ب وتقاطع المنصفان في نقطة هـ فبرهن على أن ∠ ب هـ حـ = ½ (∠ ب + ∠ حـ)

(١٥) ا ب حـ ى متوازى اضلاع مد قطراه ا حـ الى هـ بحيث كان حـ هـ = حـ ا ومن نقطة هـ رسم المستقيم هـ و يوازى حـ ب ويقابل امتداد ى حـ في و والمطلوب البرهنة على ان ا ب و حـ متوازى اضلاع

(١٦) ا ب حـ مثلث متساوي الساقين نصفت قاعدته ب حـ في نقطة ى فاذا فرضت أى نقطة على ا حـ مثل هـ فبرهن على ان ا ب — ا هـ > ى هـ — ى حـ

(١٧) المستقيم الذى يصل وسطى الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف يمر بمنتصفى قطريه

(١٨) المستقيم الذى يصل منتصفى قطرى شبه منحرف يساوى نصف الفرق بين قاعدتيه

(١٩) اذا نصفت زوايا متوازى اضلاع فبرهن على ان الشكل الناتج من تقاطع هذه المنصفات مستطيل قطراه يوازيان اضلاع متوازى الاضلاع

(٢٠) ا ب حـ ى متوازى اضلاع فرضت على قطره ا حـ النقطتان س ، ص فاذا كان ا س = حـ ص فبرهن على ان ب س ى ص متوازى اضلاع

(٢١) ا ب حـ ى شكل رباعى فيه ا ب = حـ ى فاذا كانت ∠ ب = ∠ حـ فبرهن على ان ا ى يوازى ب حـ

(٢٢) ا ب حـ ى متوازى اضلاع مد قطره ا حـ الى هـ بحيث كان

حـ ﻫ = حـ ا ثم رسم من ﻫ مستقيم يوازى حـ ب ورسم من ب مستقيم يوازى ا حـ فاذا تقاطع المتوازيان فى نقطة و فبرهن على ان ا ب و حـ متوازى اضلاع

(٢٣) ا ب حـ ء مربع فاذا وصل من ا الى منتصفى ب حـ ، حـ ء ثم وصل من حـ الى منتصفى ء ا ، ا ب فبرهن على ان الشكل الناتج من تقاطع هذه المستقيمات معين

(٢٤) ا ب حـ مثلث مد ضلعه حـ ا الى س ونصفت الزاوية الخارجة ب ا س فاذا فرضت أى نقطة ى على هذا المنصف فبرهن على ان ا ب + ا حـ > ى ب + ى حـ

(٢٥) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا حـ) فرضت نقطة ء على ساقه ا ب ومد حـ ا الى ﻫ بحيث كان ﻫ ا = ا ء فاذا وصل ﻫ ء ومد الى ان تقاطع مع ب حـ فى و فبرهن على ان ﻫ و عمودى على ب حـ

« تم الجزء الاول ويليه الجزء الثانى »

(مقرر السنة الثانية من التعليم الثانوى)

